

Планирование эксперимента и обработка экспериментальных данных

СОДЕРЖАНИЕ

ЛЕКЦИЯ 1. Основные понятия и классификация методов научного исследования.....	2
ЛЕКЦИЯ 2. ЭКСПЕРИМЕНТ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ.....	9
ЛЕКЦИЯ 3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В ЭКСПЕРИМЕНТЕ	22
ЛЕКЦИЯ 4. ОБЗОР СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИНЖЕНЕРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА.....	26
ЛЕКЦИЯ 5. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ	31
ЛЕКЦИЯ 6. ОДНОФАКТОРНЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ	33
ЛЕКЦИЯ 7. МНОГОФАКТОРНЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ.....	37
ЛЕКЦИЯ 8. МЕТОДОЛОГИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ. МЕТОДИКА ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА	40

ЛЕКЦИЯ 1. Основные понятия и классификация методов экспериментального исследования

Введение

Технология машиностроения занимает особое место среди других технологических процессов производства деталей машин. Наряду с преимуществами экономического характера обработка металлов резанием зачастую является единственно возможным способом получения изделий требуемого качества. Особенно возрастает роль и значение чистовых и отделочных операций, обеспечивающих высокую точность и чистоту обработанных поверхностей.

Совершенствование технологических методов обработки осуществляется на основе дальнейшего развития теоретической базы технологии машиностроения. Одновременно возрастает значение экспериментальных исследований, призванных уточнить и дополнить теоретические изыскания.

К эксперименту нередко прибегают не только в лаборатории, но и в производственных условиях. Это связано, прежде всего, с тем, что пути реализации идей, заложенных в конструкции машины, часто являются главной задачей технологической подготовки производства. Заводской инженер, отвечающий за выпуск качественной продукции, соответствующей утвержденным чертежам и техническим требованиям, обязан не только выявить причины появления брака, но и устранить их наиболее целесообразным способом. Следовательно, он должен в совершенстве владеть навыками экспериментальных исследований.

В производственных условиях чаще всего приходится исследовать точность, стабильность и устойчивость технологических процессов, выявлять целесообразность применения новых методов обработки, определять оптимальные условия достижения требуемого качества обработанных поверхностей, проводить стойкостные испытания инструментов. Результатами исследований могут стать разработанные и внедренные мероприятия, устраняющие брак, повышающие экономичность обработки, делающие технологический процесс управляемым. Для успешного проведения экспериментальных исследований инженеру необходимо:

- хорошо знать технологию машиностроения вообще и технологию изготовления конкретной детали в частности;
- обладать инженерной логикой;
- уметь отличать причину от следствия;
- быть объективным;
- знать метрологию, уметь лично производить все необходимые для исследования измерения и проверять точность измерений;
- знать приёмы и методы математической обработки результатов опыта;
- лично разрабатывать рабочие методики исследований (выбирать методы исследований).

Экспериментальные исследования включают в себя следующие основные этапы:

- подготовка к экспериментальному исследованию;

- разработка методики экспериментальных исследований;
- проведение исследований;
- анализ результатов исследований и разработка мероприятий, направленных на совершенствование процесса;
- внедрение разработанных рекомендаций.

В данном курсе приводятся основные положения этапов экспериментальных исследований.

В самом общем виде по своей структуре научные исследования делятся на фундаментальные и прикладные.

Фундаментальные исследования направлены на открытие новых, ранее не изученных явлений и законов природы и социальной реальности, а также на создание новых исследовательских методологий. Их целью является расширение научного знания в целом. Они ведутся на границе известного и неизвестного и обладают значительной степенью неопределенности.

Прикладные исследования направлены на нахождение способов использования явлений и законов природы для создания новых и совершенствования существующих средств и способов человеческой деятельности. Их целью выступает установление как можно большего числа вариантов практической эксплуатации имеющихся научных знаний.

Различие между фундаментальной наукой и прикладной было очень точно охарактеризовано Д. Томсоном – открывателем электрона – в речи, произнесенной им в 1916 году: «Под исследованием в фундаментальной науке я понимаю исследование не с целью применения его результатов в промышленности, а только для умножения знаний о Законах Природы». Томсон утверждал также, что прикладная наука совершенствует старые методы, в то время как фундаментальная наука создает новые методы, и что «если прикладная наука ведет к реформам, то фундаментальная наука приводит к революциям, которые, будь они политические или научные, являются мощными инструментами, если вы находитесь на стороне победителя».

Прикладные исследования дифференцируются на **поисковые, научно-исследовательские и опытно-конструкторские работы**. Поисковые исследования направлены на установление факторов, влияющих на изучаемый объект либо процесс. Научно-исследовательские работы связаны с созданием новых технологий, опытных установок, приборов. Опытно-конструкторские исследования направлены на подбор конструктивных характеристик создаваемого технического устройства.

Завершающей стадией прикладного исследования, как правило, является **разработка**, то есть целенаправленный процесс преобразования научно-технической информации в форму, пригодную для освоения в промышленности, подготовка к внедрению.

Одно из принципиальных различий между фундаментальными и прикладными исследованиями как раз и состоит в том, что любое прикладное исследование – это всегда такой научный проект, результаты которого изначально адресованы производителям и заказчикам и которое руководствуется нуждами или желаниями этих клиентов. Фундаментальные же исследования адресованы прежде всего другим членам научного сообщества и направлены, в первую очередь, на расширение знания о мире как такового.

При этом нужно понимать, что на современном этапе развития науки и техники в некоторых моментах фундаментальные и прикладные исследования сходятся. Так, например, для современной инженерной деятельности требуется осуществление не только краткосрочных проектов, направленных на решение специальных задач, но и широкая долговременная программа фундаментальных исследований, специально предназначенных для развития технических наук в целом. В то же время современные фундаментальные исследования (особенно в технических науках) очень тесно связаны с практическими приложениями.

Помимо прочего, для современного этапа развития науки и техники характерно использование методов фундаментальных исследований для решения прикладных проблем. В то же время, тот факт, что исследование является фундаментальным, еще не означает, что его результаты прагматически бесполезны, а работа, направленная на прикладные цели, может носить фундаментальный характер. Критериями их разделения являются в основном временной фактор и степень общности. Вполне правомерно сегодня говорить и о фундаментальных промышленных исследованиях.

Надо помнить также и о том, что в некоторых случаях, не будучи источником, фундаментальная наука выступает основой тех или иных технологических достижений. Такая роль фундаментальной науки обычно может быть выявлена только ретроспективно. Ярким примером подобного положения дел является создание атомных реакторов и атомных бомб. В определенном отношении атомный проект может быть рассмотрен в качестве приложения специальной теории относительности, которая собственно и выступила источником упомянутых выше технологических изобретений.

Таким образом, ясно видно, что **характер связей между фундаментальной и прикладной науками – это одна из наиболее глубоких и трудных проблем в истории и методологии научного познания.**

Понятие «метод» означает способ исследования, путь познания действительности, форму теоретического и практического освоения её. Правильно выбранный метод играет решающую роль в познавательных процессах, так как него зависят результаты и успехи исследований.,

Всеобщим методом познания действительности служит **материалистическая диалектика**. Она составляет основное ядро общей методологии познания. Её принципы и понятия выработаны на основе изучения наиболее общих законов природы, общества и мышления. Исследуя различные формы движения материи, материалистическая диалектика познает их качественную и количественную определенность, рассматривает окружающие нас явления во взаимосвязи и взаимообусловленности, в движении и развитии.

Каждая наука имеет свои методы поиска и обоснования научной истины **Метод научного исследования** – это система умственных и (или) практических операций (процедур), которые нацелены на решение определенных познавательных задач с учетом определенной познавательной цели.

Функция метода состоит в том, что с его помощью получают новую информацию об окружающей действительности, углубляются в сущность явлений и процессов, раскрывают законы и закономерности развития, формирования и функционирования объектов, которые исследуются.

От качества метода, правильности его использования зависит истинность полученных знаний. Научный метод исследования характеризуется такими чертами: · *ясностью*; · *нацеленностью* на достижение определенной цели, решение конкретных задач; *детерминированностью* – строгой последовательностью использования метода (максимальная его алгоритмизация); · *результативностью* – способностью обеспечить достижение определенной поставленной цели; *надежностью* – способностью с высокой вероятностью обеспечить получение желаемого результата; *экономичностью* – возможностью получения определенных результатов с наименьшими затратами времени и средств.

Важным требованием к методу познания является его соответствие объекту исследования и уровню познания.

Одним из положений методологии является то, что каждый метод исследований сам должен быть теоретически обоснованным.

Метод – это способ достижения цели в теории, которая разрабатывается. Он должен быть объективным, так как отображает действительность в ее взаимосвязи. Одновременно метод является и субъективным, поскольку используется конкретным исследователем с его субъективными особенностями.

Дифференциация наук происходит не только по характеру объектов изучения, но и по методам, которые в них применяются. С другой стороны, отдельные науки, независимо от их различия, имеют много общего, прежде всего в связи с тем, что они рассматривают закономерности материального и духовного мира на основе их изучения, используют одни и те же законы мышления и методы исследований.

Научное познание можно представить в виде следующей схемы: факты – соотношения между ними – эксперименты – начальные гипотезы – теория – правдоподобные допущения – снова гипотезы – эксперимент – уточнение – проверка уже применяемой теории – возникновение парадоксов – теория – ситуация – озарение – новая теория, новые гипотезы – эксперимент и следующий цикл.

Методы научного познания делятся на философские, общенаучные (т.е. для всех наук) и конкретно-научные (для отдельных наук).

Философские методы базируются на использовании в научных исследованиях категорий, положений, принципов и законов определенной философской системы. Такими системами сегодня являются позитивизм, неопозитивизм, постмодернизм и т.д.

Общенаучные методы используются в преобладающем количестве наук, научных дисциплин и направлений. Они условно делятся на традиционные и современные.

К *традиционным* методам относятся:

- *наблюдение* – способ познания объективного мира на основе непосредственного восприятия предметов и явлений с помощью органов чувств. Оно ведется по плану и подчиняется определенной тактике;

- *анализ* – способ научного исследования, при котором процесс (явление) разлагается на составляющие с целью их всестороннего изучения. В нем особое место занимает системный анализ, который состоит из четырех этапов:

- определения объекта, целей и задач исследования, критериев для изучения и управления объектом;
- определения границ системы, ее структуры, объектов и процессов, которые имеют отношение к поставленной цели;
- составления математической модели исследуемой темы;
- анализа математической модели и полученных результатов;
- *синтез* – исследование явления (процесса) в целом на основании объединения одного элемента за другим в единое целое. Синтез позволяет обобщить понятия, законы и теорию. В теоретических науках он выступает как объединяющий конкурирующие в определенной степени противоположные теории в формы построения дедуктивных теорий;
- *индукция* – метод, при котором по конкретным фактам и явлениям устанавливаются общие принципы и законы;
- *дедукция* – метод исследования, при котором конкретные положения выводятся из общих;
- *сравнение* (по Гегелю) – это способ показать общее в различном и различное в общем;
- *аналогия* – такой прием познания, при котором на основе сходства объектов по одним признакам делается заключение об их сходстве и в других признаках. Существование аналогии явлений составляет гносеологическую основу моделирования;
- *обобщение* – прием мышления, в результате которого выявляются общие свойства и признаки объектов. Операции обобщения могут повторяться несколько раз последовательно, приводя к новым понятиям.

К **современным** относятся методы моделирования, системный, формализации, идеализации, аксиоматико-дедуктивный.

Моделирование – изучение объекта (оригинала) путем создания и использования его копии (модели), которая обладает общими с оригиналом свойствами, интересующими исследователя. Модель может соответствовать оригиналу по изучаемым признакам, но существенно отличаться по другим свойствам. Модели могут быть предметными и знаковыми.

Алгоритм метода моделирования включает: постановку задачи; создание или выбор модели; исследование ее; перенесение значений (экстраполяция) с модели на объект исследования.

Математическое моделирование – это создание математической модели и экспериментирование с ней с целью получения результирующего показателя при изменении параметров, влияющих на этот показатель.

Метод формализации – изучение объектов путем отображения их содержания, структуры, формы или функционирования в знаковом виде с помощью искусственных языков: математического и логико-математического моделирование, язык химических символов и операций с ними.

Метод идеализации предусматривает создание идеальных моделей и сравнительных ситуаций, которые изучаются в идеальном варианте. При этом используются специфические особенности некоторых других методов - моделирования аналогии, абстрагирования и т.п. Идеальные модели строят двумя способами. Первый – это абстрагирование от всех, кроме одной самой важной в данном аспекте черты (особенности), которая доводится до абсолютизма.

Второй способ – придание модели всех возможных черт и особенностей (функций, отношений), которые имеют реальные объекты.

Аксиоматико-дедуктивный метод применяется, как правило, в точных науках (математике, физике) и базируется на установлении начального набора понятий, формулировании нескольких аксиом, т.е. истин, которые не требуют доказательств и из которых затем строго логическим путем выводятся различные следствия.

Конкретно-научные методы исследования используются в отдельных или в нескольких близких между собой научных дисциплинах. Эти методы делятся на междисциплинарные и специальные.

К междисциплинарным относятся методы:

полевых исследований (в геологии, географии, биологии, экологии и т.д.) используется для непосредственного изучения объекта в натуре путем наблюдения за ним, инструментальных измерений параметров, исследования функционирования или развития.

Существуют различные способы этих исследований – общий, выборочный, маршрутный. В них предусматриваются этапы : подготовительный (изучение источников информации об исследуемом объекте и формирование начальных идей, проблем, гипотез), непосредственный (сбор материалов и первичной информации, уточнение существующих данных) и камеральный (обработка, анализ, сопоставление, разработка выводов и т.д.). В экономике к ним относятся маркетинговые исследования реализации продукции и услуг;

экономического районирования – основной метод обоснования территориально-комплексного развития и размещения производительных сил страны и ее экономических районов для разработки так называемых территориальных схем. Это предплановые (прогнозные) научные исследования экономического развития отдельных территориальных единиц на 15 и более лет;

метод анализа аналоговых объектов – изучение подобных объектов путем их сравнения, если знания об одном из них являются достоверными. При этом выделяется два этапа:

- установление общих черт между объектами, которые исследуются, и уже известным объектом;

- изучение экономических черт между этими объектами;

- *балансовый* – группа расчетных приемов для анализа прогнозирования и планирования развития динамических систем с установлением потоков ресурсов и продукции («затраты – выпуск», «производство – потребление», «прибыль – затраты»). В экономике составляются балансы трудовых ресурсов, миграционных процессов, производства и потребления различных видов продукции, топлива, электроэнергии и др.;

картографический – составление отдельных карт, их серий и атласов для получения новых знаний путем их анализа и преобразования. *Карта* – это носитель пространственной информации, ее хранитель и передатчик.

Специальные методы исследования обосновываются отдельной наукой и используются главным образом в ней. К ним относятся расчетно-конструктивный, экономико-статистический, теория вероятностей, методы деловых игр и экспертных оценок.

Знания, не рожденные опытом, матерью всякой достоверности, бесплодны и полны ошибок. /Леонардо-да-Винчи/

Начало 21 века поражает нас грандиозными достижениями в области компьютерных технологий, созданием глобальных информационных сетей и искусственного интеллекта. На первый взгляд может показаться, что лавинообразные информационные технологии вытесняют экспериментальные, но это далеко не так. Благодаря появившейся возможности постановки машинных экспериментов, количество физических исследований действительно значительно сократилось, но эксперименты стали более сложными, более точными и более дорогими.

Английский физик барон Кельвин, оценивая роль практики, сравнивал теорию с жерновами, а опытные данные с зерном, которое засыпают в эти жернова. Совершенно ясно, что одни жернова, сколько бы они не крутились, ничего полезного дать не смогут (теория работает сама на себя). Но качество муки определяется качеством зерна, и гнилое зерно не может дать питательной муки. Поэтому доброкачественность эксперимента является необходимым условием как для построения передовой теории, так и для получения практических результатов.

Выступая на общем собрании членов Академии Наук, академик П.Л.Капица отметил, что разрыв между теорией и экспериментом, между теорией и жизнью, между теорией и практикой есть симптом серьезных нарушений нормального развития науки. В тот момент, когда даже самый крупный ученый перестает работать сам в лаборатории, он не только прекращает свой рост, но и вообще перестает быть ученым.

Экспериментальные исследования материального мира, зародившиеся несколько веков назад, не утратили своей актуальности и в настоящее время. Экспериментальные методы очень часто используются совместно с расчетными дополняя друг друга. Так, измерения на натурных конструкциях позволяют определить действующие на них нагрузки, напряжения и деформации. Данные опытов используют при разработке математических моделей конструкций, а так же для оценки точности результатов численных расчетов. Экспериментальные методы широко используются при изучении механических свойств материалов, испытании конструкций на прочность, для анализа

ЛЕКЦИЯ 2. Эксперимент. Основные понятия и определения

Эксперимент. Экспериментатор. Объект эксперимента. Факторы неизменные, варьируемые, случайные. Задачи организации и планирования эксперимента. Функция цели и правила ее назначения. Способы получения числовой характеристики объекта. Интерполяционные и оптимизационные задачи эксперимента. Требования к варьируемым факторам. Операциональность, независимость, управляемость, совместность факторов. Приемы сокращения количества факторов. Анализ размерностей.

Эксперимент (от лат. Experimentum-опыт)-научно поставленный опыт - наблюдение исследуемого явления в специально создаваемых и точно учитываемых условиях, позволяющих следить за ходом явления и воссоздавать его каждый раз при повторении этих условий. Вместе с производственной деятельностью людей эксперимент составляет важнейшую сторону практики, являющуюся основой познания и критерием истины результатов процесса познания.

В последние десятилетия широкое развитие получили научные исследования, объектом которых явился сам эксперимент. Значительные успехи достигнуты в области планирования эксперимента, которое превратилось в самостоятельное, быстро развивающееся и эффективное научное направление. Большое и благотворное влияние на организацию эксперимента в технике оказала теория подобия. Получило развитие моделирование как своеобразный вид эксперимента.

Развитие теории эксперимента вместе со стремительно прогрессирующими техническими средствами его проведения открывает широкие возможности для повышения эффективности всех видов экспериментальных исследований.

Х. Шенк в предисловии к своей книге «Теория инженерного эксперимента» приводит остроумное выражение: «Проведение экспериментов - искусство, которому можно научиться, но которому нельзя научить». В нем подчеркнут верный и очень важный смысл: успех в эксперименте, в исследовании может быть достигнут лишь в результате творчества, заменять которое не могут никакие, даже самые совершенные приемы, методы, инструменты и приборы. Они могут вместе с тем способствовать творческому процессу— сократить время исследования, помочь избежать ошибок, сформулировать результаты в удобном для использования виде и т.п. Именно с такой целью и излагается далее теория современного эксперимента. Изучение этой теории должно принести пользу творчески мыслящему инженеру в его деятельности, в практической реализации гениальной ленинской формулы теории познания: «От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике - таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности.

Задача организации и планирования эксперимента - нахождение таких правил его проведения и обработки результатов, при которых удастся получить наибольшую информацию - надежную и достоверную - или найти путь к оптимуму с возможно меньшей затратой труда, а также представить эту информацию в компактной и удобной форме с количественной оценкой ее точности.

Введем несколько понятий, существенных для рассматриваемой концепции эксперимента.

Экспериментатор—исследователь, проводящий эксперимент.

Объект эксперимента - предмет исследования, то, что подвергается исследованию.

Цель, функция цели—точное указание свойства, признака, характеристики и т.п., устанавливаемых или оптимизируемых в процессе эксперимента; то, ради чего проводится эксперимент. Без ясно сформулированной цели эксперимент чаще всего просто потеря времени, а иногда и средств. В одном зарубежном техническом журнале приведена удачная шутка по этому поводу: «Нельзя даже заблудиться, если не знаешь, куда идешь».

Неизменные факторы или условия эксперимента - совокупность не изменяемых намеренно в процессе данного эксперимента признаков объекта и испытываемых им воздействий. Неизменные воздействия, входящие в условия эксперимента, могут задаваться с помощью какого-либо испытательного стенда, в который помещается объект эксперимента; они должны контролироваться посредством соответствующей измерительной аппаратуры. Результаты эксперимента часто оказываются лишенными ценности, а иногда и смысла, если они не сопровождаются четкими и полными указаниями условий эксперимента.

Варьируемые факторы—признаки или воздействия, изменяемые в процессе данного эксперимента для установления их влияния на функцию цели. Варьирование может осуществляться по воле экспериментатора — такой эксперимент называют активным. Для его осуществления обычно требуются специально создаваемые объект и испытательное оборудование. Факторы, влияние которых на функцию цели изучается в эксперименте, могут изменяться помимо воли [экспериментатора](#) и лишь регистрироваться им - такой эксперимент называют пассивным. Следует подчеркнуть, что деление факторов на неизменные и варьируемые условно и определяется лишь задачами данного конкретного эксперимента.

Случайные факторы—неконтролируемые воздействия на объект в процессе эксперимента. В классической концепции влияние случайных факторов стремятся свести к минимуму, рассматривать явление, процесс в чистом виде. Такой подход необходим, если объект используется для изучения отдельных явлений или физических законов.

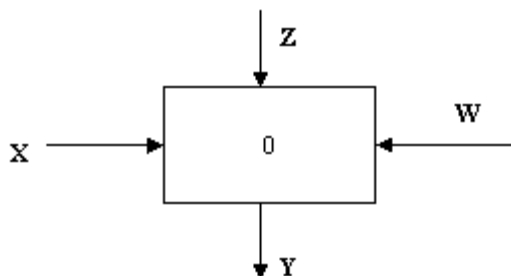


Рис. 1.1.

Вместе с тем объектом эксперимента все чаще становятся сложные диффузные системы (технологический процесс, комплексное устройство и т. н.), где проявляются во взаимодействии многие законы и очень заметно влияние случайных неконтролируемых воздействий. При этом, конечно, нет смысла сводить эти воздействия к минимуму, т. е. делать объект нереальным, а следует их тщательно учитывать в ходе организации эксперимента и обработки данных.

Данные — информация в любой форме, получаемая в процессе проведения эксперимента. Обработанные и подвергнутые анализу данные образуют результаты эксперимента.

План эксперимента—совокупность правил, в соответствии с которыми определяется цель, выделяются и классифицируются факторы, устанавливается последовательность действий экспериментатора, обрабатываются данные, интерпретируются полученные результаты.

В общем виде схема эксперимента может быть представлена объектом O (рис.1.1), характеризуемым функцией цели Y , на который воздействуют варьируемые факторы X , неизменные факторы Z и случайные факторы W .

В задачу эксперимента входит установление связки Y и X , справедливой для принятых условий Z при случайных воздействиях W , т. е. полученные зависимости

$$Y = F(X) \quad (X \rightarrow X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (1.1)$$

Будем называть такие задачи интерполяционными.

Задачей эксперимента может быть также определение некоторого, наилучшего в определенном смысле сочетания факторов X_{opt} , при котором функция цели достигает желаемого экстремума Y_{ext} т. е.

$$Y_{ext} = F(X_{opt}) \quad (1.2)$$

Такие задачи отнесем к оптимизационным, или задачам оптимизации.

При одном варьируемом факторе зависимости (2.1) и (2.2) могут быть легко представлены как графически, так и аналитически; при двух факторах графическое представление еще возможно, хотя уже неудобно (семейства кривых); при трех и более факторах нужно обязательно искать аналитическую форму связи.

Впервые концепция активного эксперимента, в которой рассматривалось несколько одновременно варьируемых факторов X и не игнорировалось действие факторов W , была разработана английским статистиком Р. Фишером в 20-е гг. нашего столетия.

Объектом эксперимента служило поле, на котором выращивалась зерновая культура, функцией цели - урожай зерна. В состав факторов группы X , подвластных исследователю и варьируемых им, входили количество и состав вносимых удобрений, глубина, вспашки и степень разрыхления почвы, подготовка семян и т.п. К факторам группы Z относились местоположение участков поля, состав почвы, сорт пшеницы. Наконец, случайные факторы в этой задаче очевидны и главный из них—погодные условия.

В задачу эксперимента входило определение влияния факторов группы X на урожай и, конечно, нахождение такого сочетания этих факторов X_{opt} , при котором урожай оказывался максимальным. Решая подобные задачи, Р. Фишер сформулировал основные принципы научной дисциплины — теории планирования эксперимента.

Специфика его объектов эксперимента состоит в том, что они крайне разнообразны - от совокупности заготовок, обрабатываемых на станке с ЧПУ, или процесса копания грунта, осуществляемого шагающим экскаватором, до системы нелинейных интегродифференциальных уравнений, заложенных в программу ЭВМ. В первом случае очевидно сильное влияние случайных факторов, совместное и неразделимое протекание многих различных по своей

природе явлений, что делает объект «плохо организованным», именно таким, с какими имеет дело теория планирования эксперимента. Во втором - объект вовсе не подвержен случайным влияниям, полностью детерминирован, отлично организован и управляем. В нашу задачу будет входить как изучение общих принципов, лежащих в основе современной теории эксперимента, так и учет специфики объектов, характерных для электромеханики, в частности, математических моделей и комплексов «модель — макет».

Правила назначения функции цели

Правильный выбор функций цели в эксперименте - необходимое условие успеха. Этот выбор относится в значительной мере к творческой стороне эксперимента, т. е. к той которой, как отмечал Х. Шенк, нельзя научить. Вместе с тем можно назвать некоторые общие правила, которые необходимо иметь в виду при выборе функций цели

Первое и главное правило - функция цели должна полно, точно и универсально отражать именно то, что фактически интересует экспериментатора. Несмотря на кажущуюся очевидность правила, оно далеко не всегда выполняется на практике, в частности, с ним не совместимы эксперименты, проводимые «на всякий случай», чтобы «поисследовать вообще». Но даже в правильно поставленных экспериментах правило имеет силу.

Приведем пример. Цель эксперимента — определить влияние ряда факторов на энергетическую эффективность электропривода, работающего в циклическом режиме. В качестве функции цели может быть выбран либо КПД в некоторых условиях, либо потеря энергии за цикл, либо цикловой КПД

$$\eta_{\text{ц}} = \frac{\int_0^{t_{\text{ц}}} P_2(t) dt}{\int_0^{t_{\text{ц}}} P_2(t) dt + \int_0^{t_{\text{ц}}} \Delta P(t) dt},$$

где $P_2(t)$, $\Delta P(t)$ — полезная мощность и потери мощности как функции времени; $t_{\text{ц}}$ — время цикла. Нетрудно видеть, что последняя характеристика значительно более емко, полно и универсально отражает основную **цель**.

Второе правило: функция цели должна быть определена количественно, т. е. выражена числом. В ряде случаев это правило выполняется естественно и просто, например, при записи в качестве данных эксперимента показаний измерительных приборов. Однако чаще его выполнение требует определенного внимания.

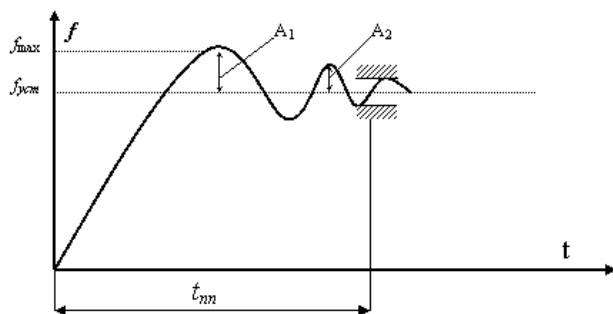


Рис. 1.2 График переходного процесса

Например, изучая экспериментально (или посредством расчета) режимы работы лифта с целью последующего проектирования электропривода для него, мы без труда убеждаемся, что интересующие нас величины — продолжительность цикла и нагрузка - случайные. Для выполнения правила требуется **их статистическая обработка**, в результате которой определяются числа — параметры

законов распределения случайных величин. Эта же ситуация неизбежно воз-

никает при изучении влияния режимов привода экскаватора на производительность его работы, при исследовании качества деталей, производимых на станке с налаживаемым новейшим электроприводом, во множестве других подобных случаев.

Очень часто данные эксперимента получаются в виде кривых. Это в первую очередь относится к любым динамическим процессам, регистрируемым с помощью осциллографа или самописца. Для выполнения правила требуются обработка кривых и получение чисел.

Пусть, например, изучаемый процесс имеет характер, показанный на рис. 1.2. В качестве функций цели могут использоваться следующие величины:

1. $t_{\text{пп}}$ — продолжительность переходного процесса, определяемая как время вхождения изменяющейся величины в заданную зону около установившегося значения;

$$\sigma_{\text{мах}} = \frac{f_{\text{мах}} - f_{\text{уст}}}{f_{\text{уст}}} \quad - \text{относительное максимальное перерегулирование};$$

$$\lambda = \ln \frac{A_1}{A_2} \quad \text{— логарифмический декремент колебаний};$$

N_k — число колебаний (максимумов) до вхождения величины в нужную зону (на рис. 1.2 $N_k=2$), а также любые другие, удобные в конкретном исследовании.

В сложных задачах наиболее интересными и отвечающими первому правилу часто оказываются качественные признаки, которые не удастся просто выразить в виде числа в результате измерения. Например, если сравниваются изделия, произведенные на прецизионных станках с конкурирующими системами электропривода, то даже опытным специалистам (конечно, беспристрастным) иногда трудно отдать предпочтение одной из систем — слишком много признаков должно быть принято во внимание. В подобных случаях оказывается полезным **ранговый подход**, когда качественному признаку (или сложной совокупности количественных) ставится в соответствие число — ранг. Иными словами, каждому изделию в нашем примере беспристрастные контролеры ставят отметку при принятой заранее системе. Не будем подробнее касаться указанной возможности выполнять второе правило: каждый из читателей-студентов прекрасно знает слабые и сильные стороны рангового подхода, постоянно испытывал его на себе в процессе контроля текущей успеваемости и особенно на сессиях.

Третье правило: в **интерполяционных задачах функций цели** может быть сколько угодно; в оптимизационных задачах только одна.

Действительно, если мы изучаем влияние, например, параметров привода на его динамику, которую наблюдаем в виде кривых, подобных показанной на рис. 2.2, то все перечисленные выше и многие другие функции цели могут на равных фигурировать и регистрироваться в эксперименте. Его итогом будет столько выражений (2.1), сколько функций цели мы приняли к рассмотрению. Если же мы ищем некоторое оптимальное сочетание параметров, то функция цели, ради которой это делается, называемая иногда в этом случае параметром оптимизации, должна быть одна и только, одна. Попытка искать оптимум сразу по нескольким параметрам оптимизации столь же бессмысленна, сколь

принятое всерьез утверждение: «*И волки сыты, и овцы целы*».

В задачах оптимизации при необходимости учитывать несколько функций цели можно воспользоваться одним из двух путей.

Путь первый - одна из функций цели (главная) выбирается в качестве параметра оптимизации и в эксперименте ищется ее минимум или максимум, а все остальные играют роль ограничений (лимитеров). Например, не лишена смысла такая постановка задачи: масса привода должна быть (минимальной при быстродействии и КПД цикла не ниже заданных и при искажении напряжения сети и перегреве двигателя не выше заданных).

Путь второй — строится один обобщенный параметр оптимизации, объединяющий k исходных функций цели:

$$Y = f(Y_1, Y_2, \dots, Y_i, \dots, Y_k)$$

Этот путь, как бы он ни был реализован, всегда связан с субъективизмом и опасностью искать не совсем то, что хочется. Е. С. Вентцель в одной из своих работ по исследованию операций приводит критерий достоинств человека, предложенный в шутку Л. Н. Толстым и представляющий собой дробь, в числителе которой — истинные достоинства, а в знаменателе - мнение человека о себе. Легко видеть, что при очень малом знаменателе стремиться к росту числителя как будто бы и не очень нужно ...

При построении обобщенного параметра оптимизации обычно объединяют безразмерные функции цели - непосредственно или с какими-либо весовыми коэффициентами. Для приведения Y_i к безразмерной форме y_i , можно воспользоваться простейшей операцией

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{при } Y_i < Y_{i \text{ дост}} \\ 1 & \text{при } Y_i \geq Y_{i \text{ дост}} \end{cases}$$

где $Y_{i \text{ дост}}$ - достигнутый уровень Y_i . Знак $<$ использован здесь в смысле «хуже», знак $>$ - «лучше». При оптимизации

$$y = \prod_{i=1}^k y_i \rightarrow 1$$

Этот грубый прием, очевидно, приводит к очень нечувствительному обобщенному параметру оптимизации.

Существует много более тонких приемов, не устраняющих, однако, отмеченные выше принципиальные недостатки. Многие из них связаны с так называемыми **функциями желательности**, с помощью которых пытаются формализовать представление экспериментатора о важности тех или иных количественных значений отдельных функций цели, объединяемых в обобщенный параметр оптимизации.

В случае, когда каждая из объединяемых функций цели имеет известное «идеальное» значение $Y_{i \text{ ид}}$, можно ввести

$$y = \left(\frac{Y_i - Y_{i \text{ ид}}}{Y_{i \text{ ид}}} \right)^2$$

Тогда при оптимизации будем иметь

$$y = \sum_{i=1}^k y_i \rightarrow 0$$

Последнее условие можно усовершенствовать, введя в него весовые коэффициенты a_i , отражающие значимость каждого слагаемого (по-прежнему, конечно, субъективную):

$$y = \sum_{i=1}^k a_i y_i \rightarrow 0 ,$$

причем

$$y = \sum_{i=1}^k a_i = 1 , a_i > 0 .$$

Приведенные правила могут быть полезными лишь для творчески мыслящего экспериментатора; их формальное применение не приведет к успеху.

Требования к варьируемым факторам

Рассмотрим факторы группы X применительно к активному эксперименту, т. е. воздействия на объект, организуемые и варьируемые экспериментатором с целью определения их влияния на функцию цели. Факторы группы Z , как отмечалось, должны обладать лишь одним главным свойством - неизменностью, которую необходимо строго контролировать в эксперименте.

Как и функция цели, факторы группы X должны быть определены *количественно*. Это требование вытекает из сформулированной ранее задачи эксперимента — установления зависимостей (2.1) или (2.2).

Чтобы правильно интерпретировать результаты эксперимента, нужно точно указывать способ количественного определения фактора, совокупность и последовательность действий, в результате которых фактору ставится в соответствие то или иное число. Такое определение фактора называют **операциональным**.

Покажем важность сказанного на простом примере. Изучается влияние температуры перегрева изоляции обмоток двигателя на срок его службы. Очевидно, что не указав, каким способом и где измеряется температура, мы придем к ничему не отражающей модели: температура в различных точках двигателя различив и сильно зависит от того, как (термопарой или по изменению сопротивления проводника) была измерена.

В ряде случаев оказывается возможным использовать в эксперименте сложные факторы, такие, например, как тип привода (если изучается его влияние на потребление энергии или на качество продукции), форма кривой управляющего сигнала, настройка регулятора и т. п. При этом количественная определенность достигается присваиванием каждому используемому уровню сложного фактора какого-либо номера.

В активном эксперименте факторы X должны быть *управляемыми*, т. е. экспериментатор должен иметь возможность задавать любое требуемое значение фактора внутри области его определения и поддерживать фактор на заданном уровне в ходе эксперимента.

Точность задания каждого фактора должна быть высокой, во всяком случае такой, чтобы уровни фактора были четко различимы и чтобы влияние случайных факторов на X было существенно меньше, чем на Y .

Факторы X в активном эксперименте должны быть **независимыми**, т. е. каждый из них должен устанавливаться на любом требуемом уровне вне зависимости от того, на каких уровнях (из числа используемых в эксперименте) находятся другие факторы. Нельзя, например, выбрать в качестве факторов напряжение, ток и сопротивление какого-либо элемента цепи, поскольку они связаны законом Ома и лишь два из них, но не все три, могут варьироваться независимо.

Факторы X в активном эксперименте должны быть **совместными**, т. е. любые используемые в эксперименте сочетания их уровней не должны приводить к аварийным ситуациям (опасные перегрузки, короткие замыкания, и т. п.) или к режимам, не имеющим смысла, нарушающим нормальное функционирование объекта эксперимента. Последнее правило—очевидно: плата за его недооценку — испорченное оборудование при работе с физическими объектами или попусту истраченное время при работе с математическими моделями.

Выбор факторов, как и назначение функций цели, - этап организации эксперимента, неосуществимый без творческого подхода к делу. Приведенные правила, содержащиеся в любом пособии по планированию эксперимента, могут помочь, но не могут освободить экспериментатора от необходимости думать и точно знать, зачем проводится эксперимент.

Из изложенного уже ясно, что технически эксперимент состоит в установлении факторов X на некоторых уровнях и наблюдении при этом за функцией цели Y . Процедуры и алгоритмы будут рассмотрены далее, пока же отметим, что полный перебор всех k уровней n факторов потребует N опытов, причем

$$N = k^n \quad (2.3)$$

Нетрудно видеть, что N даже при минимальном $k=2$ резко растет с увеличением n , а это значит, что резко растут время, стоимость, трудоемкость эксперимента. В теории планирования эксперимента разработаны приемы, позволяющие в той или иной мере преодолевать указанную сложность. Вместе с тем противоречие между желанием узнать больше (n больше) и затрачиваемым трудом (большое N) всегда сопровождает экспериментатора. Отсюда ясно стремление уменьшить число варьируемых факторов n без потери информации об объекте.

Одним из самых распространенных приемов служит переход к относительным величинам. Покажем его применение на примере.

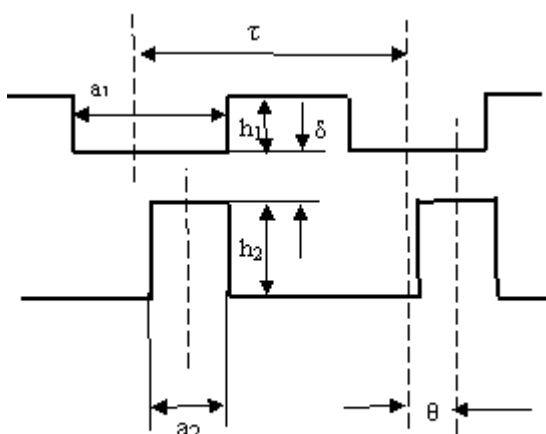


Рис. 1.3

Пример 1.1. Для зубчатой структуры воздушного промежутка, показанной на рис. 2.3, определяется зависимость магнитной проводимости одного зубцового деления на единицу длины пакета магнитопровода Λ от геометрических факторов $\theta, a_1, a_2, h_1, h_2, \delta, \tau$. При варьировании каждого из 7 факторов лишь на двух уровнях полный перебор всех сочетаний в соответствии с (2.3) составит $N=2^7=128$. Переход к относительным величинам при выборе в качестве базы зубцового деления τ дает шесть факторов:

$$X_0 = \theta / \tau, X_1 = a_1 / \tau, X_2 = a_2 / \tau, X_3 = h_1 / \tau, X_4 = h_2 / \tau, X_5 = \delta / \tau$$

т. е. уменьшает N с 128 до 64 при одновременном достижении универсальности результатов, т. е. пригодности их для любых геометрически подобных структур.

Анализ характера факторов позволяет обнаружить их различие: факторы X_1, \dots, X_5 отражают геометрию зубчатой структуры, тогда как фактор X_0 харак-

теризует относительное положение верхней и нижней частей, от которого зависит Λ . Для каждого сочетания значений X_1, \dots, X_5 соответствующего конкретной конфигурации воздушного промежутка, функция

$$\Lambda = f(X_0)$$

может быть представлена рядом Фурье

$$\Lambda = \Lambda_0 + \sum_{v=1}^{\infty} \Lambda_v \cos v X_0$$

где v - номер гармоники.

Коэффициенты в последнем выражении, зависящие от геометрических размеров зазора

$$\Lambda_v = F(X_1, \dots, X_5,$$

удобно выбрать в качестве функций цели ($v=0, 1, 2, 3$). Такой выбор функции цели (Λ_v вместо Λ) позволил уменьшить число факторов еще на один без потери общности и универсальности результата. ($\tau = A\sqrt{IC}$)

В ряде задач, с которыми часто приходится иметь дело в электромеханике, число факторов удастся сократить при одновременном увеличении универсальности результата на основе применения анализа размерностей, рассматриваемого в следующем параграфе.

Анализ размерностей как средство уменьшения числа факторов

В основу анализа размерностей положены следующие интуитивно очевидные постулаты.

1. Любое явление или процесс, подчиняющиеся действию физических законов, должны иметь математическое описание, инвариантное к системе единиц, в которой выражены переменные и параметры.

2. В математическом описании обязательно используется операция измерения физической величины, т. е. сопряжение ее с числом.

Все физические величины можно разделить на *первичные* и *вторичные* в зависимости от того, как осуществляется их измерение.

Первичные величины x измеряются путем прямого сопоставления их с эталонами (единицами измерения.) x_0 , т. е.

$$X = x / x_0 \quad (1.4)$$

где X - численное значение величины x при эталоне x_0 .

Очевидно, что численные значения X существенно зависят от выбранных эталонов. Например, выбрав за эталон длины $X_0 = 1$ см, мы выразим размеры тетради, на которой пишем, как $X_1 = 28$ и $X_2 = 20$. Приняв за эталон дециметр ($x_0' = 1$ дм), получим $X_1' = 2,8$ и $X_2' = 2,0$; выбрав метр ($x_0 = 1$ м), будем иметь $X_1'' = 0,28$; $X_2'' = 0,20$ и т.д. Таким образом, сами численные значения никоим образом нельзя считать абсолютными признаками объекта - они по своей сути относительны:

$$X_i'' = k_i X_i' \quad (1.5)$$

где $k_i = x_0' / x_0''$

Однако есть и абсолютный признак, который не зависит от выбранных X_i - это отношение численных значений. Действительно,

$$X_1 / X_2 = X_1' / X_2' = X_1'' / X_2'' = \text{const} \quad (1.6)$$

В нашем примере отношение размеров $X_1/X_2=1,4$ —признак объекта (тетради), инвариантный к выбранной системе единиц (эталонов длины).

В анализе размерностей это важное свойство называют абсолютностью отношений. Оно отражает первый постулат и для первичных величин выполняется автоматически.

Вторичные величины y выражаются через первичные посредством известного определительного уравнения

$$y = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) \quad (1.7)$$

Их численные значения Y зависят как от эталонов x_{0i} так и от вида уравнения (2.7).

В соответствии с первым постулатом и для этих величин должна существовать абсолютность отношений, т. е. если

$$Y' = f(X_1', \dots, X_i', \dots, X_m'),$$

$$Y'' = f(X_1'', \dots, X_i'', \dots, X_m'')$$

и справедливо (2.5), то

$$Y'' = KY'. \quad (1.8)$$

Выполнение условия (2.8) возможно лишь при следующем виде определительного уравнения (2.7):

$$y = Ax_1^{a_1} \dots x_i^{a_i} \dots x_m^{a_m}. \quad (1.9)$$

Тогда, очевидно,

$$Y' = A(X_1')^{a_1} \dots (X_i')^{a_i} \dots (X_m')^{a_m},$$

$$Y'' = A(X_1'')^{a_1} \dots (X_i'')^{a_i} \dots (X_m'')^{a_m}$$

и с учетом (2.5)

$$\frac{Y''}{Y'} = K = k_1^{a_1} \dots k_i^{a_i} \dots k_m^{a_m}. \quad (1.10)$$

Полученный результат можно распространить и на случай, когда некоторая вторичная величина зависит от m первичных и r вторичных, т. е.

$$y = f(x_1, \dots, x_m, \dots, y_1, \dots, y_r) \quad (1.11)$$

Тогда

$$y = Ax_1^{a_1} \dots x_m^{a_m} y_1^{b_1} \dots y_r^{b_r} \quad (1.12)$$

и

$$K = k_1^{a_1} \dots k_m^{a_m} K_1^{b_1} \dots K_r^{b_r} \quad (1.13)$$

Выражения (2.10) и (2.13) называют формулами размерности или размерностями, а показатели степени в них — показателями размерности.

Приведем пример, чтобы пояснить использованные обозначения. Вторичная величина—скорость $y=v$ — выражается через первичные: путь $x_1=s$ и время $x_2=t$. Определительное уравнение

$$y = f(x_1, x_2) = Ax_1^{a_1} x_2^{a_2}$$

в котором $A=1$, $a_1=1$, $a_2=-1$.

Тогда в обозначениях (2.10) формула размерности v (или размерность v) запишется как

$$K_v = k_s k_t^{-1}.$$

Иногда используют другую систему обозначений, заменяя коэффициенты символами величин, к которым они относятся; при этом вторичные величины иногда заключают в квадратные скобки. Запись, эквивалентная предыдущей, имеет вид

$$[v]=L\theta^{-1}$$

Здесь L и θ — соответственно символы, длины и времени;

$[v]$ —размерность скорости, выраженная через первичные величины.

Отметим, что формула размерности (размерность) первичной величины совпадает с ее символом. Безразмерные величины имеют нулевые показатели размерности.

Любую зависимость вида (2.1), описывающую физическое явление или процесс и связывающую существенные для данной задачи переменные, параметры и константы, можно рассматривать как определительное уравнение (2.12) и получить для него формулу размерности (2.13), выбрав некоторые из величин в качестве первичных. В механике часто первичными величинами считают массу, длину и время и обозначают их соответственно символами M , L и θ . Отметим, что указанный выбор, вообще говоря, не обязателен, возможны и другие сочетания (например, F (сила), L , θ и т. п.), однако используют три независимые первичные механические величины. В тепловых задачах к ним добавляется температура T , в электротехнических—ток I . Размерности различных механических тепловых и электрических величин, выраженные через перечисленные, которые рассматриваются как основные первичные, приведены в табл. 1.1 [7].

Таблица 1.1. Формулы размерностей. Механические величины

Величина	Размерность
Объем	L^3
Кривизна	L^{-1}
Скорость	Lq^{-1}
Ускорение	Lq^{-2}
Угловая скорость	q^{-1}
Угловое ускорение	q^{-2}
Плотность	ML^{-3}
Количество движения	MLq^{-1}
Момент количества движения	ML^2q^{-1}
Сила	MLq^{-2}
Работа, энергия	ML^2q^{-2}
Мощность	ML^2q^{-3}
Вязкость	$ML^{-1}q^{-1}$
Кинематическая вязкость	L^2q^{-1}
Поверхностное натяжение	Mq^{-2}
Давление	$ML^{-1}q^{-2}$
Момент силы	ML^2q^{-2}

Формулы размерности (1.13) служат основой для преобразования ис-

ходных выражений типа (1.11) к безразмерному виду, т. е. для перехода от первоначальных размерных факторов $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_r$ к новым факторам — безразмерным комплексам π_1, \dots, π_n , число которых меньше числа исходных факторов.

Указанная операция выполняется в соответствии с теоремой Бэкингема, или π -теоремой, состоящей из двух частей.

Первая часть теоремы: если формула размерности однородна, то она может быть представлена в безразмерном виде.

Условие однородности уравнения (1.13) означает отличие от нуля всех входящих в него показателей степени. Невыполнение этого условия показывает, что исходная запись (1.11) некорректна с точки зрения соблюдения физических законов: в ней либо пропущены существенные для задачи параметры или константы, либо, напротив, присутствуют величины, не влияющие на изучаемый процесс или явление, т. е. не существенные для данной задачи.

Анализ размерностей не дает ответа на вопрос о том, что именно не верно, однако заставляет исследователя задуматься о постановке задачи и соответствующим образом изменить ее. Однородность уравнения (1.13) понимается, не гарантирует правильности постановки задачи, т. е. записи (1.11), она свидетельствует лишь о том, что противоречия с законами физики в этой записи не содержится.

Вторая часть теоремы: число безразмерных комплексов равно числу переменных, параметров и констант, существенных для изучаемого процесса или явления, за вычетом числа независимых первичных величин, через которые выражены эти переменные, параметры и константы.

Для определения безразмерных комплексов нужно решить уравнение (1.13) относительно показателей степени, точнее, — выразить некоторые выбранные показатели через остальные. При числе комплексов $n > 1$ возможны различные комбинации, определяемые тем, какие из показателей выражаются через остальные. Строгое решение вопроса о числе комбинаций, об их рациональном выборе и т. п. выходит за рамки данного рассмотрения и предполагает использование более полных пособий, например указанных ранее книг А. А. Гухмана, В. А. Веникова и Г. В. Веникова и др.

Пример 1.2. [1]. Пусть изучается движение некоторого тела (рис. 2.4) в вязкой среде и определяется влияние на силу лобового сопротивления F четырех факторов: скорости тела V , Его размера H , плотности ρ и вязкости μ среды, т. е.

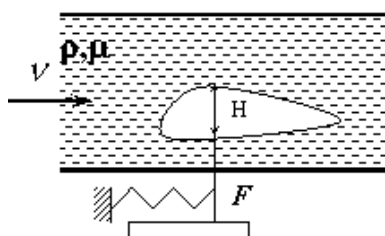


Рис. 1.4

$$F = f(v, H, \rho, \mu)$$

В соответствии с изложенным запишем эту зависимость в виде (1.12).

$$F = A v^a H^b \rho^c \mu^d$$

и будем иметь формулу размерности

$$K_F = K_v^a K_H^b K_\rho^c K_\mu^d$$

Пользуясь табл. 1.1, выразим размерности всех величин через три основные первичные (M, L, θ)

$$ML\theta^{-2} = (L\theta^{-1})^a L^b (ML^{-3})^c (ML^{-1}\theta^{-1})^d.$$

Проверим однородность уравнения — убедимся, что все показатели степени отличны от нуля. Это условие может быть выполнено, поскольку все основные символы встречаются в формуле не менее двух раз.

Воспользовавшись второй частью теоремы, определим число комплексов. В задаче пять величин, которые в силу однородности уравнения размерностей можно считать существенными. Эти величины выражены через три первичные, в связи с чем $n=5-3=2$.

Найдем безразмерные комплексы, для чего запишем по одному уравнению, связывающему показатели степени, для каждой из трех первичных величин:

$$\text{для } M \quad 1=c+d$$

$$\text{для } L \quad 1=a+b-3c-d,$$

$$\text{для } \theta \quad -2=-a-d$$

Имеем три уравнения с четырьмя неизвестными, т. е. можем выразить любые три показателя через оставшийся четвертый. Выразив a, b, c через d , получим

$$a=b=2-d; \quad c=1-d.$$

Подставив эти значения в (*), найдем

$$F = A v^{2-d} H^{2-d} \rho^{1-d} \mu^d$$

или

$$\frac{F}{v^2 H^2 \rho} = A \left(\frac{\mu}{v H \rho} \right)^d.$$

Четырехфакторную задачу мы свели к однофакторной, резко сократив труд и, что, может быть, более важно, получив универсальный результат. Варьируя комплекс $\pi_2 = \mu/vH\rho$ на нескольких уровнях, будем искать в эксперименте соответствующие значения комплекса $\pi_1 = F/v^2 H^2 \rho$, т. е. строить кривую, которая отражает интересующую нас связь для всех подобных объектов.

ЛЕКЦИЯ 3. Статистические методы исследований в эксперименте

Случайная величина и ее параметры. Статистический анализ СВ. Статистические задачи первого и второго типов. Квантили распределения. Законы распределения. Алгоритмы решения задач математической статистики. Ошибки первого или второго рода.

Принципиальная особенность **случайной величины (СВ)** – невозможность предсказания ее конкретного значения до испытания.

Дискретные СВ - целочисленные значения (число двигателей, работающих на объекте в какой либо момент времени). **Непрерывные СВ** – любое значение в некотором интервале (размер поверхности детали).

Основные параметры СВ приведены в таблице.

Название	Генеральные	Выборочные
Объем СВ	$N \rightarrow \infty$ Бесконечное (или очень большое число) проявление СВ	n – некоторое число наблюдаемых значений СВ $X_i, i = 1..n$ $n \leq 5$ – малая выборка $10 < n < 30$ – средняя выборка $50 < n < 200$ – большая выборка
Математическое ожидание СВ	Определяет наиболее вероятную зону нахождения СВ при бесконечно числе ее проявлений $a_1 < MX < a_2$ Не является конкретным числом, определяется границами доверительного интервала a_1, a_2	Выборочное среднее $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$
Дисперсия СВ	Определяет наиболее вероятный размер области рассеяния СВ при бесконечно числе ее проявлений $b_1 < SX < b_2$ Не является конкретным числом, определяется границами доверительного интервала b_1, b_2	Выборочная дисперсия $\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2}{n - 1}$

Как охарактеризовать СВ? Необходимо получить числовые характеристики ее генеральных и (или) выборочных параметров.

Для получения количественных оценок СВ необходимо провести СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. Основные этапы статистического анализа:

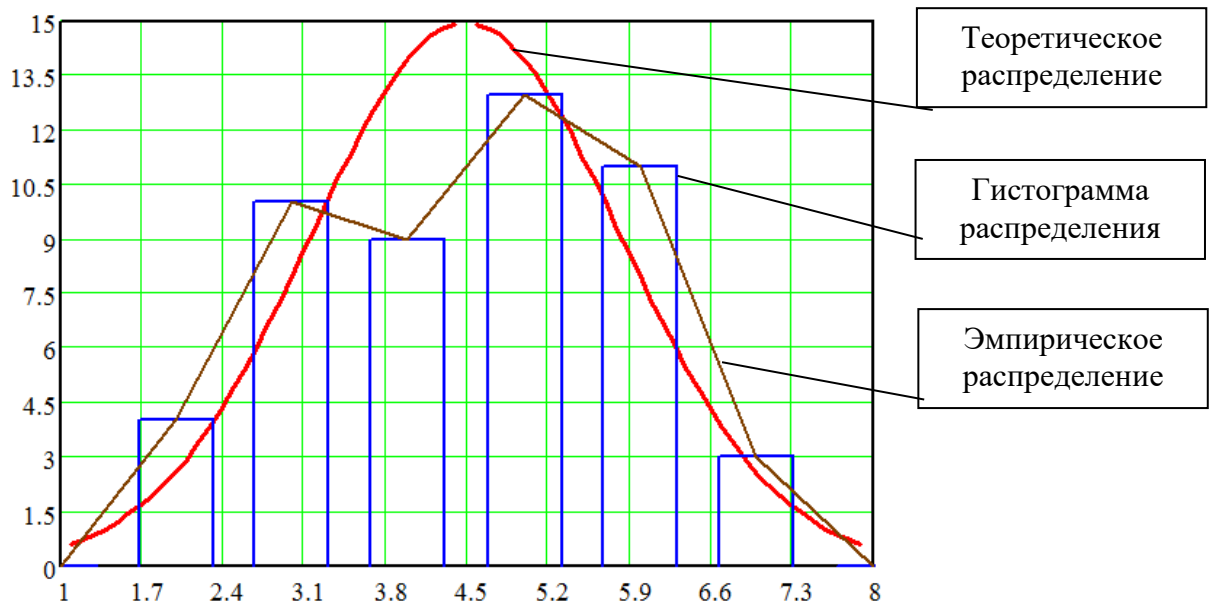
- 1 Получить выборочную совокупность СВ $X_i, i=1..n$
- 2 Разделить поле рассеяния $RX = \max(X) - \min(X)$ на K интервалов получив вектор границ интервалов Y

$$K = 1 + 1.43 * \ln(n)$$

$$Y_1 = \min(X) \quad Y_{j+1} = Y_j + (\max(X) - \min(X)) / K, \quad j = 1..K+1$$

- 3 Для каждого интервала $[Y_j, Y_{j+1}]$ определить количество попавших в него значений X , то есть получить вектор частот v_j .

4. Построить ГИСТОГРАММУ распределения величины X – столбчатую диаграмму зависимости v_j от Y_j (см. рисунок)



5 Построить кривую эмпирического распределения

6 Сопоставить полученный закон эмпирического распределения с известным теоретическим законом распределения. Это можно сделать и визуально. Но лучше использовать специальные критерии соответствия (например, для нормального распределения Гаусса – критерии Колмогорова или ХИ-квадрат)

Подробную методику статистического анализа см. практическую работу «Статистический анализ случайной величины»

Как только определен закон распределения СВ, любые ее параметры могут быть вычислены.

Существует два типа задач математической статистики.

1. По выборочным числовым характеристикам СВ получить представление о числовых характеристиках распределения генеральной совокупности.

2. По выборочным числовым характеристикам СВ обоснованно судить о правомочности принятия некоторой статистической гипотезы, например:

- выдвинутой гипотезе распределения генеральной совокупности;
- принадлежности двух или более выборок одной генеральной совокупности;
- случайном или неслучайном различии параметров статистических выборок

Список гипотез для задач второго типа НЕОГРАНИЧЕН и зависит от творческой активности и успешности экспериментатора.

Решение задач основано на использовании законов распределения СВ и их квантилей распределения.

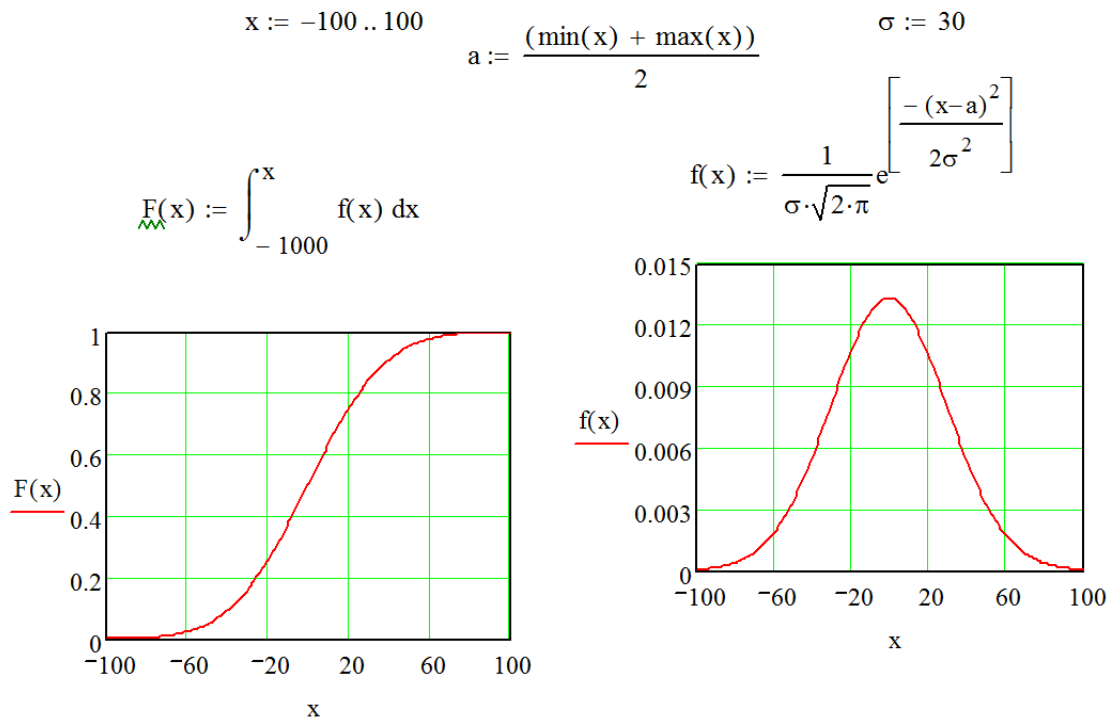
Закон распределения СВ - это отношение, устанавливающее связь между возможными значениями СВ и вероятностями, с которыми принимают эти значения. Закон распределения полностью характеризует СВ.

Пусть X – некоторая случайная величина, проявляющая себя на числовой оси X . Рассматривается событие, заключающееся в условии, что X окажется меньше чем некоторая величина X_p ($x < X_p$). Вероятность этого события обозначается как $p(x < X_p)$. Уровень значимости $q = 1 - p$. ***Всегда $p + q = 1$.***

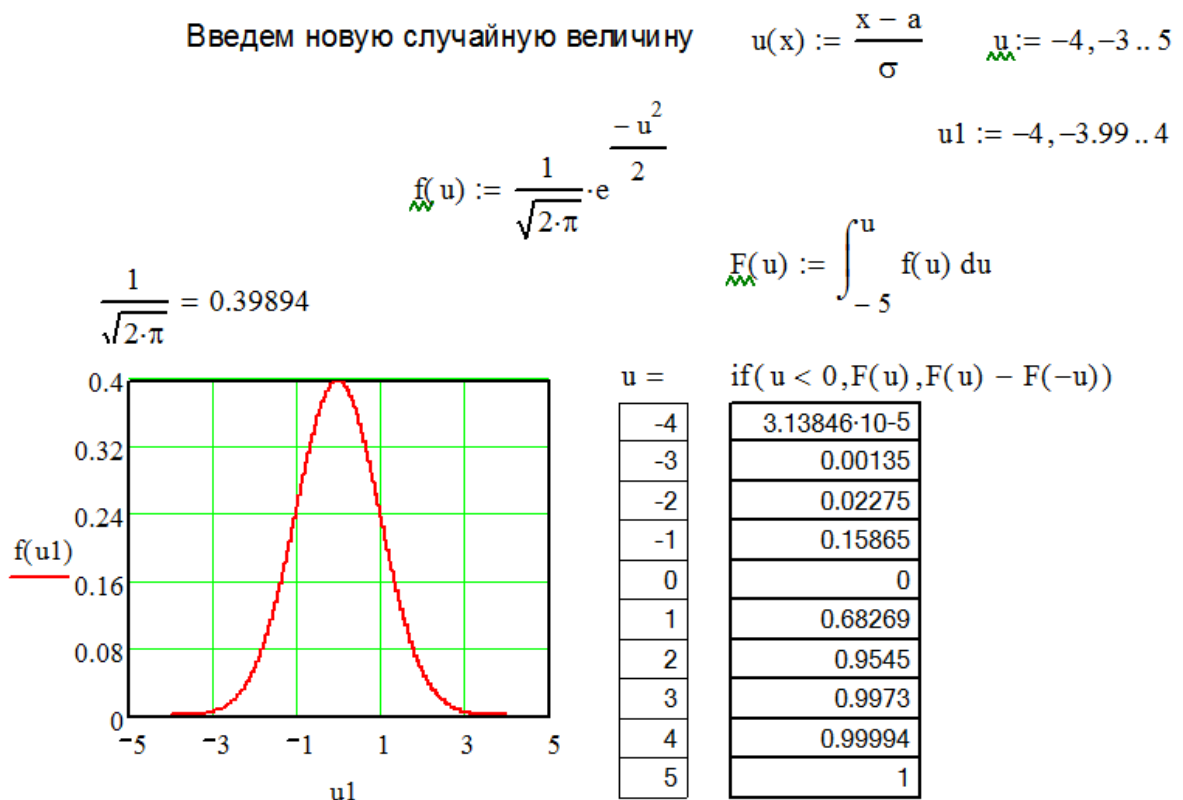
Предположим, что известна функция закона распределения случайной величины X , то есть для каждого X_p имеется соответствующая ему вероятность события $p(x < X_p)$ – одностороннее распределение или $p(X_{p1} < x < X_{p2})$ – двухстороннее распределение.

Квантиль закона распределения X_p - значение случайной величины X с приписанной ей вероятностью P . Другое определение квантиля - табулированное значение функции закона распределения случайной величины.

Рассмотрим построение закона нормального распределения Гаусса $F(x)$ и функции плотности нормального распределения $f(x)$ (MathCad).



Рассмотрим процесс построения квантилей стандартного нормального распределения. (MathCad)



$$F(1.96) - F(-1.96) = 0.95$$

Стандартное нормальное распределение – симметричное двухстороннее распределение

*Наиболее часто применяемый в технике уровень вероятности $p=0.95$.
Квантиль стандартного нормального распределения составляет $\pm 1,96$*

Алгоритм решения задач первого типа

Пусть известен закон распределения случайной величины X - стандартное нормальное распределение, σ и результат одного наблюдения x_0 . Определить генеральное среднее случайной величины X .

ЗАДАЧА ПЕРВОГО ТИПА, так как необходимо найти параметр генеральной совокупности !!!

1. Находим связь заданной в задаче СВ с СВ, квантили которой известны. Так как X подчиняется стандартному нормальному распределению, то (см. рис. выше)

$$x=a+\sigma \cdot u \Rightarrow u=(x-a)/\sigma$$

2. Выбрать доверительную вероятность ответа. $P=0.95$

3. Установить квантильные границы и сформировать разрешающее задачу неравенство

$$u_{p=0.95}=\pm 1,96$$

$$-1.96 < u < 1.96$$

$$-1.96 < (x_0 - a) / \sigma < 1.96$$

4. Решить неравенство относительно определяемой величины

$$x_0 - 1.96\sigma < a < x_0 + 1.96\sigma$$

Алгоритм решения задачи второго типа

В опыте получено одно значение СВ $u=u_0$. Проверить гипотезу о том, что U подчиняется стандартному нормальному распределению.

ЗАДАЧА ВТОРОГО ТИПА, так как необходимо проверить статистическую гипотезу!!!

1. Находим связь заданной в задаче СВ с СВ, квантили которой известны. Так как u проверяется на соответствие стандартному нормальному распределению,

$$u=u$$

2. Выбрать доверительную вероятность ответа. $P=0.95$

3. Установить квантильные границы и сформировать разрешающее задачу неравенство

$$u_{p=0.95}=\pm 1,96$$

$$-1.96 < u_0 < 1.96$$

4. Проверить истинность неравенства относительно определяемой величины

Если неравенство истинно – принять гипотезу. Если неравенство ложно – отвергнуть гипотезу.

При решении статистических задач можно совершить ошибки первого или второго рода.

Ошибка 1 рода - отвергнуть хорошую гипотезу.

Ошибка 2 рода - не отвергнуть неверную гипотезу.

Вероятность совершить ошибку первого рода падает с уменьшением $q=1-P$.

Вероятность совершить ошибку второго рода уменьшается с ростом $q=1-P$.

ЛЕКЦИЯ 4. Обзор статистических критериев для решения задач инженерного эксперимента

Статистические критерии Стьюдента, Пирсона, Фишера, Кохрена. ТАУ-критерий. Примеры решения статистических задач на применение критериев.

Решение статистических задач проводится на основе ряда специальных распределений с известными (табулированными) квантилями. Общий подход состоит в том, что вводится случайная величина, связанная с изучаемой и удобная для решения той или иной конкретной задачи.

Распределение Стьюдента (t-критерий).

Распределение было получено Госсетом (псевдоним Стьюдента) в 1908 г. Зависит от объема выборки N или числа степеней свободы $f=N-1$, с которым определена выборочная дисперсия S^2 (среднее квадратическое отклонение (СКО) выборки S), и от заданной вероятности ответа, определяемой параметром уровня значимости q . Формула критерия:

$$t = \frac{\bar{x} - a}{s} \sqrt{N}, \quad (3.1)$$

где a — генеральное среднее исследуемой случайной величины X ;

\bar{x} — выборочное математическое ожидание X .

Распределение симметрично относительно начала координат, т. е.

$$t_{q/2} = -t_{1-q/2}.$$

Более полные таблицы квантилей распределения Стьюдента для уровня значимости $q \neq 0,05$ содержатся в [1].

Таблица 3.1 Квантили распределения Стьюдента при $q=0,05$

$f=N-1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	∞
$t_{1-q/2}$	12,7 1	4,3 0	3,1 8	2,7 8	2,5 7	2,4 5	2,3 7	2,3 1	2,2 6	2,2 3	2,0 9	2,0 4	1,9 6

Распределение Стьюдента дает возможность находить генеральное среднее или проверять статистические гипотезы при очень малых выборках.

Пример 1. Известны три значения нормально распределенной случайной величины X : $x_1 = 10$; $x_2 = 9,5$; $x_3 = 10,2$. Требуется оценить генеральное среднее с вероятностью $p = 0,95$ (задача первого типа).

Определим выборочное ($N = 3$) математическое ожидание \bar{x}

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{10 + 9,5 + 10,2}{3} = 9,9.$$

Определим выборочное СКО при $f = N-1=2$:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{(10-9,9)^2 + (9,5-9,9)^2 + (10,2-9,9)^2}{2}} = 0,36.$$

Запишем выражение для t в соответствии с (4.1):

$$t = \frac{\bar{x} - a}{s} \sqrt{N} = \frac{9,9 - a}{0,36} \sqrt{3}.$$

По табл. 1 определим квантильные границы $t_{1-q/2} = 4,30$, $t_{q/2} = -4,30$ и запишем неравенство

$$-4,30 < \frac{9,9 - a}{0,36} \sqrt{3} < 4,30.$$

Решив неравенство относительно a , получим с доверительной вероятностью $p = 0,95$

$$9,0 < a < 10,8.$$

Пример 2. Проверить гипотезу, состоящую в том, что нормально распределенная случайная величина X имеет генеральное математическое ожидание $a = 10$ на основании результатов двух испытаний: $x_1=8,1$, $x_2=8,9$ (задача второго типа).

По результатам испытаний определяем $\bar{x} = 8,5$ и $s = 0,57$.

Вычисляем по (4.1) значение критерия Стьюдента t :

$$t = \frac{8,5 - 10}{0,57} \sqrt{2} = -3,71.$$

Выбираем уровень значимости $q = 0,05$ и по табл. 4.1 находим для $f=N-1=1$ границы критических областей гипотезы $t_{1-q/2} = 12,71$, $t_{q/2} = -12,71$.

Гипотеза не отвергается на уровне значимости $q=0,05$, поскольку $t = -3,71$ лежит вне критических областей. Отметим, что очень малая информация ($N = 2$) и низкий уровень значимости не дают оснований отвергнуть плохую на взгляд гипотезу. Если бы, например, те же результаты ($\bar{x} = 8,5$ и $s = 0,57$) были получены при $N = 4$ ($f = 3$), то, как легко видеть, гипотезу следовало отвергнуть на том же уровне значимости. При выборе более жесткого уровня значимости, $q = 0,2$ и $T_{1-q/2} = 3,08$, т. е. гипотеза также должна быть отвергнута.

Распределение Пирсона

Распределение Пирсона (χ^2 -критерий) удобно для оценки генеральной дисперсии σ^2 по выборочной s^2 . В 1900 г. Пирсон ввел случайную величину

$$\lambda^2 = \frac{(N-1) \cdot S^2}{\sigma^2} \quad (3.2)$$

и нашел ее распределение, зависящее лишь от $f = N - 1$. Оно несимметрично, следовательно, $\lambda_{q/2}^2 = \lambda_{1-q/2}^2$. Некоторые квантили приведены в табл.2. Более полные таблицы содержатся в справочниках [1].

Таблица 3.2. Квантили распределения Пирсона λ_{1-q}^2

f	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
$\lambda_{1-0,95}^2$	0,0039	0,103	0,352	0,71	1,14	1,63	2,17	2,73	3,32	3,94	7,3	10,9
$\lambda_{1-0,05}^2$	3,8	6,0	7,8	9,5	11,1	12,6	14,1	15,5	16,9	18,3	25,0	31,4

Критерий Пирсона позволяет решать статистические задачи о дисперсиях.

Пример 3. Найти с вероятностью $p = 0,9$ доверительный интервал для σ^2 нормально распределенной случайной величины, если при $f = 5$, $S^2=1$. Определив по табл.2 квантильные границы $\lambda_{0,05}^2=1,14$ и $\lambda_{0,95}^2=11,1$, имеем $1,14 < fs^2 / \sigma^2 < 11,1$ или после преобразований $0,45 < \sigma^2 < 4,39$

Пример 4. Проверить гипотезу, состоящую в том, что генеральная дисперсия нормально распределенной случайной величины $\sigma^2=2$, если обработка данных десяти опытов ($f = 9$) дала $S^2 = 4$. В связи с тем, что $s^2 \geq \sigma^2$, имеет смысл использовать одностороннюю оценку сверху. Выбрав $q = 0,05$, определим по табл. 2 $\lambda_{0,95}^2=16,9$. Обнаруживаем, что $\lambda^2 = \frac{9 \cdot 4}{2} = 18 > 16,9$, т. е. гипотеза должна быть отвергнута на уровне значимости 0,05, поскольку рассчитанная величина λ^2 оказалась в критической области.

Распределение Фишера (F-критерий)

Используется для проверки однородности двух выборочных дисперсий s_1^2 и s_2^2 (обычно принимают $s_1^2 > s_2^2$ и используют односторонние оценки), найденных соответственно с f_1 и f_2 , с целью установить или отвергнуть их принадлежность одной генеральной совокупности. Фишером введена случайная величина

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad (3.3)$$

и построено ее распределение, зависящее от f_1 и f_2 . Некоторые квантили распределения Фишера для $q=0,05$ приведены в табл. 4.3.

Таблица 3.3 Квантили распределения Фишера $F_{1-0,05}$

f_2	f_1								
	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249,0	254,3
2	18,5	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

Пример 5. Проверить гипотезу об однородности двух выборочных дисперсий нормально распределенной случайной величины. Результаты опытов: $s_1^2=0,9$ при $f_3=3$ и $s_2^2=0,2$ при $f_2=5$.

Выбрав $q=0,05$, находим по табл. 3 $F_{1-q}=5,4$. Из данных опытов имеем $F=0,9/0,2=4,5$, следовательно, $F < F_{1-q}$ и гипотеза об однородности s_1^2 и s_2^2 , т. е. о принадлежности их одной генеральной совокупности, характеризуемой σ^2 , не отвергается на уровне значимости 0,05

Распределение Кохрена (G-критерий)

Используется для проверки однородности k выборочных дисперсий, найденных с одинаковыми числами степеней свободы $f_i=N-1$. Кохреном введена случайная величина

$$G = \frac{s_{j,\max}^2}{\sum_{j=1}^k s_j^2}, \quad (3.4)$$

где $s_{j,\max}^2$ — наибольшая из сравниваемых дисперсий; и построено ее распределение, зависящее от f_j и k . В табл. 4.4 приведены некоторые квантили G_{1-q} для $q=0,05$.

Таблица 3.4 Квантили распределения Кохрена $C_{1-0,05} \times 10^2$

k	f_j										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
2	100	98	94	91	88	85	83	82	80	79	50
3	97	87	80	75	71	68	65	63	62	60	33
4	91	77	68	63	59	56	54	52	50	49	25
5	84	68	60	54	51	48	46	44	42	41	20
6	78	62	53	48	44	42	40	38	37	36	17
7	73	56	48	43	40	37	35	34	33	32	14
8	68	52	44	39	36	34	32	30	29	28	13
9	64	48	40	36	33	31	29	28	27	26	11
10	60	45	37	33	30	28	27	25	24	24	10
20	39	24	22	19	17	16	15	14	14	13	5
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Пример 6. Проверить гипотезу об однородности выборочных дисперсий $s_1^2=3$, $s_2^2=5$, $s_3^2=15$, $s_4^2=2$ и $s_5^2=4$, каждая из которых определена с $f_j=4$ на уровне значимости $q=0,05$.

По табл. 4.4 находим для односторонней оценки при $f_j=4$ и $k=5$ $G_{0,95} = 0,54$. Из опытных данных в соответствии с (4.4) имеем

$$G = \frac{15}{3+5+15+2+4} = 0,52 < 0,54$$

т. е. на уровне значимости 0,05 гипотеза об однородности дисперсий не отвергается.

Отметим здесь, что наилучшей оценкой k -однородных дисперсий служит дисперсия, определяемая как

$$s^2 = \left(\sum_{j=1}^k s_j^2 \right) / k \quad (3.5)$$

с числом степеней свободы $f = kf_j = k(N-1)$. Эта оценка может использоваться для определения доверительного интервала для генеральной дисперсии σ^2 .

τ -распределение (τ -критерий)

Используется для проверки однородности наблюдений, исключения грубых ошибок или выбросов. Квантили распределения случайной величины

$$\tau = \frac{|x_{ip} - \bar{x}|}{s}, \quad (3.6)$$

зависящего лишь от объема выборки N , по которой определяются \bar{x} и s , приведены для вероятности $p=0,95$ в табл. 3.5.

Таблица 3.5 Квантили τ -распределения при $q=0,05$

N	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
τ_{1-q}	1,41	1,69	1,87	2,00	2,17	2,24	2,29	2,29	2,49	2,62

Пример 7. На одном из пяти одинаковых агрегатов (третьем), выполняющих однотипные технологические операции, были внедрены мероприятия по экономии электроэнергии. Оценить их эффективность, если зарегистрированное месячное потребление энергии каждым агрегатом составляет $x_1 = 10$, $x_2 = 12$, $x_3 = 8$, $x_4 = 9$, $x_5 = 11$.

Как и предполагалось, на третьем агрегате расход энергии минимален, т. е. $x_3 = 8$. Выбран $q=0,05$, найдем по табл. 5 что, $\tau_{0,95} = 1,87$. По опытным дан-

ным определим $\bar{x} = 10$, $s = 1,58$ и вычислим $\tau = \frac{|8-10|}{1,58} = 1,27$.

Поскольку $\tau = 1,27 < 1,87$, т. е. не попадает в критическую область гипотезы, нет оснований считать, что достигнутый результат неслучаен, т.е. обусловлен проведенными мероприятиями. Он вполне может быть объяснен естественным разбросом в потреблении электроэнергии отдельными агрегатами, и оснований для выплаты премии в этом случае статистика не дает.

ЛЕКЦИЯ 5. Дисперсионный анализ

Назначение и сущность дисперсионного анализа. Стандартный план проведения испытаний. Рандомизация. Алгоритм обработки данных. Основные выводы по методике.

Поставим задачу определить факт влияния факторов X на функцию цели Y в условиях действия случайных факторов W .

Задача решается с помощью дисперсионного анализа (ДА), который позволяет выявить, приведет ли изменение X к значимому изменению Y то есть фактически является ли X варьируемым фактором.

Результат опыта Y можно представить как сумму 2-х слагаемых:

$$Y = Y' + Y'',$$

где Y' - часть результата, обусловленная влиянием X ,

Y'' - часть результата, обусловленная влиянием W .

По свойствам дисперсии:

$$DY = DY' + DY'',$$

где DY – общая дисперсия результатов наблюдений

DY' - дисперсия Y , обусловленная влиянием X ;

DY'' - дисперсия Y , обусловленная влиянием W .

Если оценить однородность общей дисперсии результатов DY и дисперсии от влияния случайных факторов DY'' , то в случае принятия гипотезы компонента DY' (дисперсия от влияния X) оказывается незначительной, или X на Y не влияет.

Таблица 4.1 План проведения дисперсионного анализа

№ опыта	Уровни X_j				
	X_1	X_2	X_3	...	X_M
1	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	...	Y_{1M}
2	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	...	Y_{2M}
3
$i = 1 \dots K$	$j = 1 \dots M$...
K	Y_{K1}	Y_{K2}	Y_{K3}	...	Y_{KM}

Итак, дисперсионный анализ сводится к определению дисперсии результатов опытов DY'' , обусловленных влиянием случайных факторов W . Данная задача может быть решена только путем запланированного повторения K опытов на M уровнях. В табл. 6 приведен стандартный план построения исследований.

Для исключения систематических погрешностей данных измерений последовательность проведения $N = K \cdot M$ опытов определяется с помощью процедуры **рандомизации** (табл. 4.2).

Таблица 4.2 Рандомизация последовательности проведения опытов

№ п.п.	Генератор случайных чисел от 1 до $M \cdot K$							
Уровень	1	1	1	1	2	2	...	K
Опыт №	1	2	3	M	2	3	...	M
Порядок проведения	5	2	1	3	8	4	...	24

Обработка данных строится по следующему алгоритму.

1. Определяем выборочное математическое ожидание по каждому уровню фактора X .

$$\bar{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^K y_{i,j}}{K}$$

2. Определяем выборочные дисперсии для каждого уровня фактора X :

$$Sy_j^2 = \frac{\sum_i (y_{i,j} - \bar{y}_j)^2}{K - 1}$$

3. Проверим однородность полученных выборочных дисперсий по критерию Кохрена.

$$G = \frac{\max(Sy_j^2)}{\sum_{j=1}^M Sy_j^2}$$

Если $G < G_{\text{табл}}$, гипотеза однородности принимается.

В случае, когда гипотеза однородности отвергается, необходимо прекратить расчет и рекомендовать:

- 1) Увеличить количество опытов;
- 2) Проверить надежность измерительных средств и принять меры к повышению стабильности поведения объекта.
3. Определим дисперсию от влияния случайных факторов.

$$DU'' = \frac{\sum_{j=1}^M S_{y,j}^2}{M}$$

4. Определим математическое ожидание всех наблюдений:

$$\bar{y} = \frac{\sum_i \sum_j y_{i,j}}{M \cdot K}$$

5. Определим общую дисперсию всех наблюдений

$$DU = \frac{\sum_i \sum_j (y_{i,j} - \bar{y})^2}{M \cdot K - 1}$$

6. Проверим дисперсии DU'' и DU на однородность по критерию Фишера.

$$F_p = \frac{DU}{DU''}$$

Табличное значение критерия Фишера определяем по табл. 4.3 для

$$f_1 = M \cdot (K - 1), \quad f_2 = M \cdot K - 1$$

Если $F_p > F_{\text{табл}}$, то гипотеза однородности дисперсий DU и DU'' отвергается и, следовательно, с вероятностью P (см. табл. Фишера) управляемый фактор X оказывает значимое влияние на функцию цели Y . В противном случае необходимо сделать противоположный вывод.

ЛЕКЦИЯ 6. Однофакторный регрессионный анализ

Виды зависимостей $y=f(x)$ – функциональная, регрессионная, корреляционная. Этапы регрессионного анализа. Метод наименьших квадратов. Инженерный алгоритм формирования СЛАУ. Адекватность уравнения регрессии.

Познакомившись с основными целями и приемами дисперсионного анализа, поставим следующую задачу: научиться определять, как влияет фактор X (пока один) на функцию цели Y в условиях действия случайных факторов W .

Заметим, что из двух величин X и Y , между которыми устанавливается связь, лишь одна Y случайная. Если бы обе величины были неслучайными, то мы бы имели дело с обычной функциональной зависимостью, изучаемой в математическом анализе. Если, наоборот, рассматриваются две случайные величины X и Y , то для оценки связи между ними можно воспользоваться коэффициентом корреляции [7].

В нашем случае (X – неслучайная величина, Y – случайная) зависимость $Y=f(X)$ называют *регрессией* или *уравнением регрессии*. Эта зависимость в отличие от функциональной отражает связь между наиболее вероятным значением случайной величины Y и величиной X .

Основой для нахождения регрессии служит экспериментальный материал — N точек в плоскости Y, X . Их расположение пока что несущественно: они могут быть получены, как в рассмотренном примере, или могут появиться в результате установки X на некоторых фиксированных уровнях и проведения на каждом уровне одного или нескольких измерений Y .

Получение регрессии включает три этапа.

Этап I: постулируется вид уравнения регрессии, включающего, кроме X и Y , несколько неизвестных параметров (коэффициентов), которые находятся по опытным данным.

Этап II: определяются неизвестные коэффициенты, входящие в постулированное уравнение регрессии.

Этап III: проводится статистический анализ регрессии с целью доказательства ее адекватности экспериментальным данным, которые она представляет.

Этап I выполняется обычно на основе априорных соображений (например, нужна линейная модель), предшествующего опыта, интуиции и других неформализуемых приемов.

Обычно (но не обязательно) уравнение регрессии постулируется в виде полинома. Наиболее распространенными и удобными регрессионными моделями можно считать следующие: модель I порядка $Y=B_0+B_1X$; модель II порядка: $Y=B_0+B_1X+B_{11}X^2$.

В практике могут использоваться любые другие модели, в том числе и нелинейные относительно коэффициентов (см. табл. 6.1).

В результате замены переменных, все указанные в табл. 6.1 функции могут быть преобразованы в линейную модель первого порядка.

Таблица 5.1. Виды уравнений регрессии и их линеаризующие преобразования

№ п/п	Функции	Линеаризующие преобразования			
		Преобразования переменных		Выражения для величин B_0 и B_1 .	
		Y'	X'	B_0'	B_1'
1.	$Y = B_0 + \frac{B_1}{X}$	Y	$\frac{1}{X}$	B_0	B_1
2.	$Y = \frac{1}{B_0 + B_1 \cdot X}$	$\frac{1}{Y}$	X	B_0	B_1
3.	$Y = \frac{X}{B_0 + B_1 \cdot X}$	$\frac{X}{Y}$	X	B_0	B_1
4.	$Y = B_0 \cdot B_1^X$	$\ln(Y)$	X	$\ln(B_0)$	$\ln(B_1)$
5.	$Y = B_0 \cdot e^{B_1 \cdot X}$	$\ln(Y)$	X	$\ln(B_0)$	B_1
6.	$Y = \frac{1}{B_0 + B_1 \cdot e^{-X}}$	$\frac{1}{Y}$	e^{-X}	B_0	B_1
7.	$Y = B_0 \cdot X^{B_1}$	$\ln(Y)$	$\ln(X)$	$\ln(B_0)$	B_1
8.	$Y = B_0 + B_1 \cdot \ln(X)$	Y	$\ln(X)$	B_0	B_1
9.	$Y = \frac{B_0}{B_1 + X}$	$\frac{1}{Y}$	X	$\frac{B_1}{B_0}$	$\frac{1}{B_0}$
10.	$Y = \frac{B_0 \cdot X}{B_1 + X}$	$\frac{1}{Y}$	$\frac{1}{X}$	$\frac{B_1}{B_0}$	$\frac{1}{B_0}$
11.	$Y = B_0 \cdot e^{\frac{B_1}{X}}$	$\ln(Y)$	$\frac{1}{X}$	$\ln(B_0)$	B_1
12.	$Y = B_0 + B_1 \cdot X^n$	Y	X^n	B_0	B_1

Отметим, что неудачно выбранная (постулированная) модель может вызвать непроизводительную трату времени, хотя и не приводит к принципиальным ошибкам в результате, поскольку ее адекватность проверяется на последнем этапе и плохая модель не используется. Поэтому на этапе выбора вида регрессии надо использовать всю имеющуюся информацию. Например, если известно, что Y и X обратно пропорциональны, можно выбрать в качестве фактора $X' = 1/X$. Если априорной или какой-либо другой информации нет, следует начинать с простейшей модели (I порядка) — даже если она и окажется неадекватной, потребует для получения меньших усилий.

Этап II — нахождение неизвестных коэффициентов по опытным данным — обычно выполняют на основе метода наименьших квадратов (МНК). Рассмотрим этот широко используемый в науке и технике «метод и научимся его применять.

Пусть постулирована линейная регрессия и требуется найти B_0 и B_1 по N опытным точкам. В любом u -м опыте имеем

$$Y_u = \beta_0 + \beta_1 X_u + \varepsilon_u, \quad (6.1)$$

где Y_u , X_u — значения случайной величины Y и неслучайного аргумента X в u -м опыте; β_0 , β_1 — «истинные» значения коэффициентов регрессии, соответствующие модели $Y_{\text{ист}} = \beta_0 + \beta_1 X$;

ε_u — ошибка, объясняющая отличие наблюдаемого значения от «истинного» и обусловленная воздействием на Y случайных факторов.

Очевидно, что нам никогда не удастся найти β_0 и β_1 , а коэффициенты B_0 и B_1 , которые мы должны определить, есть некоторые *наилучшие оценки* β_0 и β_1 . Метод наименьших квадратов определяет следующее содержание термина «наилучшие»:

$$\sum_u^N (Y_u - Y_{u \text{ уст}})^2 \Rightarrow \min,$$

т. е. такие, что сумма квадратов отклонений наблюдаемых Y от «истинных» минимальна.

Для линейной регрессии следует другая запись условия МНК

$$S = \sum_{u=1}^N (Y_u - \beta_0 - \beta_1 X_u)^2 = \sum_{u=1}^N \varepsilon^2 \Rightarrow \min,$$

непосредственно позволяющая найти оценки B_0 и B_1 . Продифференцировав S по β_0 и β_1 и приравняв полученные частные производные нулю, имеем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} B_0 N + B_1 \sum_{i=1}^N X_i = \sum_{i=1}^N Y_i \\ B_0 \sum_{i=1}^N X_i + B_1 \sum_{i=1}^N X_i^2 = \sum_{i=1}^N (Y_i \cdot X_i) \end{cases}, \quad (5.2)$$

решая которую любым способом, определяем неизвестные коэффициенты уравнения регрессии B_0 и B_1 .

Познакомимся с «инженерным методом» формирования системы линейных уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов регрессии. Анализ уравнения 6.1 и первого уравнения системы 6.2 показывает, что в них есть «нечто общее». Второе уравнение системы 6.2. получается путем «умножения» первого уравнения на сумму X . Эти наблюдения позволяют сформировать «эвристический алгоритм формирования СЛАУ» заключающийся в следующем:

Первое уравнение системы соответствует виду выбранного уравнения регрессии с заменами:

B_0 на $B_0 N$; X на сумму X ; Y на сумму Y

Каждое последующее уравнение системы получаем из предыдущего путем умножения на сумму X .

Проиллюстрируем алгоритм на примере.

Пусть необходимо найти неизвестные коэффициенты регрессионного уравнения вида

$$Y = B_0 + B_1 X + B_2 X^2$$

В уравнении три неизвестных коэффициента. Следовательно, порядок СЛАУ равен 3. Применяя «эвристический алгоритм», получаем:

$$\begin{cases} B_0 N + B_1 \sum_{i=1}^N X_i + B_2 \sum_{i=1}^N X_i^2 = \sum_{i=1}^N Y_i \\ B_0 \sum_{i=1}^N X_i + B_1 \sum_{i=1}^N X_i^2 + B_2 \sum_{i=1}^N X_i^3 = \sum_{i=1}^N (Y_i \cdot X_i) \\ B_0 \sum_{i=1}^N X_i^2 + B_1 \sum_{i=1}^N X_i^3 + B_2 \sum_{i=1}^N X_i^4 = \sum_{i=1}^N (Y_i \cdot X_i^2) \end{cases}$$

Отметим, что изложенная процедура может быть осуществлена в любых случаях — МНК всегда позволит провести линию, соответствующую посту-

лированному выражению и наилучшим образом (в указанном выше смысле) отвечающую экспериментальным точкам.

Этап III — анализ адекватности регрессии, в результате которого мы должны выяснить, удачно ли выбрана исходная модель, т. е. адекватно ли отражает полученная регрессия экспериментальный материал, положенный в ее основу.

Проверку адекватности постулированной модели произведем путем сравнения двух дисперсий, одна из которых S_Y^2 характеризует влияние на Y случайных факторов, а вторая S_{ad}^2 оценивает разброс опытных значений Y относительно линии регрессии и вычисляется как

$$S_{ad}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - y(X_i))^2}{N - K}$$

с числом степеней свободы $f_{ad} = N - K$ (в модели по N опытам определены K коэффициентов).

Составим отношение

$$F_p = \frac{S_Y^2}{S_{ad}^2}$$

и сравним его с квантильной границей критерия Фишера F_T при $f_1 = N-1$ и $f_2 = f_{ad}$. Если $F < F_T$ то гипотеза об однородности сравниваемых дисперсий не отвергается на уровне значимости q , следовательно, наблюдаемый разброс Y и $y(X_i)$ может быть объяснен естественным влиянием случайных факторов и модель неадекватно описывает процесс. Если же $F > F_T$ то S_{ad}^2 значимо меньше S_Y^2 , т. е. постулированная модель статистически значимо описывает процесс и может быть признана адекватной. Заметим, что в случае, когда дисперсия адекватности стремится к нулю, расчетный критерий Фишера стремится к бесконечности. Таким образом, дисперсия адекватности может быть признана основным параметром, оценивающим качество построенной модели.

ЛЕКЦИЯ 7. Многофакторный регрессионный анализ

Этапы многофакторного регрессионного анализа. Необходимость перехода к безразмерным факторам. Основные матрицы МФА. Этапы МФА. Условие МНК Инженерный алгоритм формирования СЛАУ. Значимость коэффициентов регрессии. Адекватность уравнения регрессии.

Наиболее интересные и практически важные задачи обычно предполагают получение зависимости Y от нескольких воздействующих факторов $\{X \rightarrow X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n\}$. Такие задачи приводят к многофакторному регрессионному анализу.

Очевидно, что иметь дело с несколькими разнородными независимыми переменными, которые выражаются совершенно различными именованными числами и варьируются в различных пределах и т. п., по крайней мере, неудобно. Для того чтобы избавиться от этого неудобства, перейдем к кодированным факторам, которые будем обозначать строчными буквами x с соответствующими индексами и которые будут связаны с исходными истинными факторами X соотношениями

$$x = \frac{X - X_{cp}}{X_{cp} - X_{min}} = \frac{X - X_{cp}}{X_{max} - X_{cp}},$$

где X_{min} , X_{max} — минимальное и максимальное значения фактора, выбранные внутри диапазона его изменения (варьирования); X_{cp} — среднее значение фактора, определяемое как

$$X_{cp} = \frac{X_{min} + X_{max}}{2}.$$

После выполнения операции кодирования мы имеем дело с безразмерными факторами, варьирующимися около нуля в небольших пределах (часто в активном эксперименте выбираются пределы $-1 \dots +1$).

Постулируем модель следующего вида (коэффициенты при кодированных факторах будем обозначать строчными буквами b):

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + \dots + b_{n-1, n} x_{n-1} x_n + b_{123} x_1 x_2 x_3 + \dots + b_{12 \dots n} x_1 x_2 \dots x_n + b_{11} x_1^2 + \dots + b_{nn} x_n^2.$$

В модель входят нулевой член, члены вида $b_i x_i$ (линейная регрессия), члены вида $b_{ijk} x_i x_j x_k$, отражающие взаимодействия факторов (неполная квадратичная регрессия), и, наконец, члены вида $b_{ii} x_i^2$ (квадратичная регрессия). Очевидно, что при значительных n запись вида уравнения становится весьма громоздкой и неудобной. Не изменяя вида модели, запишем ее в более компактной форме

$$\hat{Y} = \sum_{i=0}^m b_i x_i,$$

где $x_0 \equiv 1$; x_i при $i > n$ обозначает произведения и квадраты факторов; b_i при $i > n$ — коэффициенты при произведениях и квадратах факторов; m — полное число членов полинома, не считая нулевого (всего $m+1$ член).

Переходим теперь к определению коэффициентов регрессии b_i по данным опытов. Как и в случае одномерной регрессии (см. лек. 6), в любом u -м опыте имеем

$$Y_u = \beta_0 x_{0u} + \beta_1 x_{1u} + \dots + \beta_m x_{mu} + \varepsilon_u,$$

где Y_u — значение Y в u -м опыте $x_{0u}, x_{1u}, \dots, x_{mu}$ — значения независимых переменных x_0, \dots, x_m , в u -м опыте; β_0, \dots, β_m — «истинные» значения коэффициентов регрессии, оценки которых b_0, \dots, b_m входят в модель; ε_u — ошибка в u -м опыте.

Результаты всех N опытов запишем в виде матричного уравнения

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

где

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_u \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{11} & \dots & x_{m1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{0u} & x_{1u} & \dots & x_{mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{0N} & x_{1N} & \dots & x_{mN} \end{bmatrix}; \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}; \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_u \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}.$$

Размер вектора наблюдений, или матрицы-столбца Y и вектора ошибок, или матрицы-столбца ε — $(N \times 1)$; размер вектора коэффициентов $(m+1 \times 1)$; размер матрицы X $(N \times m+1)$.

Условие МНК запишем в виде

$$S = (Y - X\beta)^2 \rightarrow \min.$$

Нормальные уравнения получим, продифференцировав по β :

$$\frac{dS}{d\beta} = -2x_t(Y - x\beta)$$

(дифференцирование выполняется по обычным правилам, но перед скобкой записывается x_t , чтобы умножение имело смысл) и приравняв производную нулю:

$$X^T X \beta = X^T Y$$

Тогда

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T Y,$$

что и является матрицей МНК — оценок коэффициентов регрессии.

Обозначив $X^T X = C$, получим $\beta = C^{-1} X^T Y$.

Отметим, что в выражение для β входит обратная матрица C^{-1} . Исходная матрица C определена на основе матрицы X , отражающей значения независимых переменных в опытах. Если мы сами задаем независимые переменные в каждом опыте, т.е. проводим активный эксперимент, мы имеем возможность позаботиться о том, чтобы сконструировать C , а следовательно, и C^{-1} некоторым наилучшим образом.

Познакомимся с «инженерным методом» формирования системы линейных уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов многофакторной регрессии.

Первое уравнение системы соответствует виду выбранного уравнения регрессии с заменами:

B_0 на B_0N ; X_k на сумму X_k ; $k=1..m$; Y на сумму Y

Каждое последующее уравнение системы получаем путем умножения первого на сумму X_k .

Проиллюстрируем алгоритм на примере.

Пусть необходимо найти неизвестные коэффициенты регрессионного уравнения вида

$$Y=B_0+B_1X_1+B_2X_2+B_3X_3$$

В уравнении четыре неизвестных коэффициента. Следовательно, порядок СЛАУ равен 4. Применяя «эвристический алгоритм», получаем:

$$\begin{cases} B_0N + B_1 \sum_{i=1}^N X_{i,1} + B_2 \sum_{i=1}^N X_{i,2} + B_3 \sum_{i=1}^N X_{i,3} = \sum_{i=1}^N Y_i \\ B_0 \sum_{i=1}^N X_{i,1} + B_1 \sum_{i=1}^N X_{i,1}^2 + B_2 \sum_{i=1}^N X_{i,1}X_{i,2} + B_3 \sum_{i=1}^N X_{i,1}X_{i,3} = \sum_{i=1}^N (Y_i X_{i,1}) \\ B_0 \sum_{i=1}^N X_{i,2} + B_1 \sum_{i=1}^N X_{i,1}X_{i,2} + B_2 \sum_{i=1}^N X_{i,2}^2 + B_3 \sum_{i=1}^N X_{i,2}X_{i,3} = \sum_{i=1}^N (Y_i X_{i,2}) \\ B_0 \sum_{i=1}^N X_{i,3} + B_1 \sum_{i=1}^N X_{i,1}X_{i,3} + B_2 \sum_{i=1}^N X_{i,2}X_{i,3} + B_3 \sum_{i=1}^N X_{i,3}^2 = \sum_{i=1}^N (Y_i X_{i,3}) \end{cases}$$

Перейдем к третьему этапу регрессионного анализа и получим выражения для дисперсии оценок коэффициентов B .

Введем в рассмотрение матрицу дисперсии коэффициентов:

$$DB = C^{-1} \cdot DY,$$

где DY – дисперсия наблюдений

В общем случае DB — квадратная матрица размером $(1+m) \times (1+m)$; диагональные элементы—дисперсии соответствующих коэффициентов, недиагональные— ковариации, представляющие собою меру неопределенности, возникающей в силу зависимости друг от друга коэффициентов регрессии. Матрица DB может быть использована для оценки значимости коэффициентов регрессии.

$$t_i = \frac{B_i}{DB_{i,i}}, \quad i = 0, 1..m$$

где t_i – расчетный критерий Стьюдента в задаче о гипотезе равенства нулю i – го коэффициента модели.

Проверка адекватности регрессии выполняется способом, описанным в лекции 6 для однофакторной регрессионной зависимости.

ЛЕКЦИЯ 8. Методология экспериментальных исследований. Методика факторного эксперимента

Этапы экспериментальных исследований. Выбор модели исследуемого объекта. Выбор метода исследования. Разработка методики экспериментальных исследований. Цель и задачи исследований. Объект, факторы процесса и средства исследований. Подготовка к проведению исследований. Методика полного факторного эксперимента (ПФЭ). Дробный факторный эксперимент

Решение поставленной перед исследователем задачи методом прямого экспериментирования связано с глубоким проникновением в сущность изучаемого процесса.

Подготовка к экспериментальному исследованию начинается с тщательного изучения всех материалов, относящихся к цели и предмету исследования. Например, при исследовании какой-либо технологической операции необходимо выяснить конструктивные особенности обрабатываемой детали, технические требования к ней, характеристики применяемого оборудования, приспособлений и инструментов, режимы резания и др. условия обработки. Затем нужно попытаться дать научное предположение о характере протекающего процесса и вероятное его объяснение, иначе говоря, разработать рабочую гипотезу. Как минимум, рабочая гипотеза устанавливает факторы, обуславливающие развитие исследуемого процесса.

На высшем уровне предполагаемое развитие процесса представляется математическим выражением, описывающим, например, его физико-механические закономерности. Но во всех случаях гипотеза не в состоянии совершенно отобразить реальный процесс и поэтому нуждается в уточнениях, доработках, даже иногда в радикальной замене новой.

Выбор модели исследуемого процесса

Каждый изучаемый процесс в конечном итоге представляют в виде некоторой модели, например, графиком или математической формулой. Главное свойство модели – это ее способность предсказывать характер протекания процесса при изменении действующих на него факторов.

Рассмотрим следующее выражение, представляющее собой аналитическую зависимость упругой деформации по отверстию детали при дорновании:

$$U = \frac{\sigma_s}{3E} a \frac{3 \frac{b^2}{a^2} + 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} \ln \frac{b^2}{a^2}, \quad (8.1.)$$

где σ_s – величина сопротивления материала пластическому деформированию, зависящая также от натяга дорнования; $2b$, $2a$ – наружный и внутренний диаметры детали; E – модуль продольной упругости.

Представленная формула – это модель процесса изменения величины упругой деформации U . Не прибегая к физическим опытам, по ней можно установить искомое значение деформации при изменении натяга дорнования, размеров детали и ее материала.

Модель в данном случае выявляет не только главные факторы рассматриваемого процесса, но и степень влияния каждого из них на процесс в целом.

Имея такую модель, исследователь легко осуществит детализацию методики последующего экспериментального исследования, с помощью которого можно установить погрешность формулы и уточнить область ее применения.

В технологии машиностроения многие процессы представляют в виде эмпирических формул, структура которых определяется на основе априорной информации. Например, при исследовании наклепа поверхностного слоя после точения получена следующая зависимость:

$$H_{\mu} = \frac{138,7 \cdot S^{0,02} t^{0,02} \alpha^{0,01} r^{0,05}}{V^{0,05} (90 + \gamma)^{0,3}} H / \text{мм}^2, \quad (8.2)$$

где H_{μ} – микротвердость на поверхности детали; V – скорость резания; S – подача; t – глубина резания; α – задний угол; γ – передний угол; r – радиус округления режущей кромки.

Применение приведенной формулы ограничено материалом детали (сталь 45) и инструмента (Т16К6), скоростью (71...282 м/мин.), подачей (0,05...0,43 мм/об) и т.д. Формулу (8.2.) нельзя использовать непосредственно для расчета величины H_{μ} при обработке, например, закаленной стали эльборовыми резцами. Однако исследователь имеет все основания предположить, что структура модели в новом процессе не изменится и представить ее в виде:

$$H_{\mu} = \frac{\alpha \cdot S^x t^y \alpha^k r^p}{V^z (90 + \gamma)^f} \quad (8.3)$$

В приведенных выше примерах входящие в формулы факторы, определяющие ход процесса, могут принимать по желанию исследователя любые постоянные значения с заданной точностью и поддерживаться на заданном уровне в течение всего опыта. Такие факторы называются управляемыми, а эксперимент, в котором они участвуют – активным.

Очень важно в период подготовки к эксперименту все факторы, обуславливающие процесс, разделить на основные, оказывающие решающее влияние на развитие процесса, и дополнительные или второстепенные. Дополнительные факторы обычно стараются нейтрализовать в процессе эксперимента путем создания таких условий, при которых их влияние на другие факторы становится незначительным. Однако следует помнить, что деление факторов на основные и дополнительные в общем случае условно и может быть произведено только на основе доверительной априорной информации.

Выбор метода исследования

Возможность одновременного изучения влияния ряда основных переменных факторов на протекание одного процесса не всегда осуществима. В таких случаях для получения с достаточной степенью надежности четкой закономерности процесса следует выделить в качестве основного фактора лишь один, нейтрализовав все остальные. Затем, последовательно перебирая основные факторы при неизменности остальных, устанавливают общие закономерности развития исследуемого процесса. Такой метод исследования называется однофакторным экспериментом.

Достижение цели с помощью однофакторного эксперимента требует постановки многочисленных опытов, число которых возрастает с ростом количества факторов. Кроме того, возникает неуверенность в оценке искомого параметра, когда входящие в найденную формулу факторы принимают одновременно различные значения, отличающиеся от фиксированных в экспери-

менте. Преодолеть возникший барьер помогает метод многофакторного планирования экспериментальных исследований. Этот метод позволяет одновременно варьировать всеми факторами в нужном направлении по специальным правилам – алгоритмам. Задачи, для решения которых может использоваться многофакторное планирование эксперимента, чрезвычайно разнообразны. Это – поиск оптимальных условий проведения процесса, построение математических моделей, выбор существенных факторов и др. При этом предпочтение отдается моделям на основе степенных рядов – алгебраическим полиномам различной степени. Например, полином первой степени с факторами x_1, x_2, x_3 и т.д. будет иметь вид:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \dots + b_nx_n. \quad (8.4)$$

Нетрудно убедиться, что к такому виду легко приводится встречавшееся выше выражение (8.3) путем его логарифмирования.

В практике технологии машиностроения встречаются процессы, формирующиеся под воздействием случайных факторов. Так, обрабатываемые детали имеют переменные по величине припуски и различную твердость материала, что вызывает не поддающиеся контролю изменения сил резания и колебания упругих отжатий в системе СПИД. В результате размеры обрабатываемых деталей будут случайным образом отклоняться от настроечного размера, т.е. будут изготовлены с некоторой погрешностью.

Для выявления характера и степени воздействия случайных факторов на процесс прибегают к статистическим моделям. Вид статистической модели часто носит многовариантный характер и может быть установлен экспериментальным путем. Практически статистическую модель выбирают на основе априорной информации. Например, для изучения погрешностей линейных и угловых размеров, шероховатости поверхности, твердости, механических свойств материала, а также масс деталей часто применяют нормальный закон распределения (Гаусса). Изменения эксцентриситета, несоосности и биения, разностенности, непараллельности и неперпендикулярности, конусности изучают на основе закона эксцентриситета (Релея). Нередко прибегают к композиционным законам распределения, представляющим собой совокупность простых распределений двух и более независимых случайных величин.

В технологических экспериментах часто возникает необходимость определения связей между двумя или большим количеством факторов, причем в большинстве случаев эти связи являются не функциональными, а статистическими (вероятностными) и обнаруживаются лишь при массовом изучении признаков. Наиболее простыми статистическими связями являются линейные, но встречаются и криволинейные (нелинейные). Статистические модели таких процессов выявляют методом корреляционного анализа.

С помощью корреляционного анализа определяют, например, как изменяется поле рассеяния размера детали при изменении припуска или твердости заготовки, изучают взаимосвязи между параметрами черновой и чистовой обработки и т.д.

Как видно из предыдущего, выбор модели процесса и метода исследования часто весьма сложен, а сама модель еще не гарантирует успех. Тем не менее, рассматриваемый этап является совершенно необходимым для определения всех последующих действий экспериментатора, т.к. от этого этапа зависят

объем и качество выполненных исследовательских операций и эффективность конечного результата исследований.

На рассмотренном этапе ставится задача принять тот вариант модели и тот метод исследования, который предположительно может обеспечить наиболее быстрое и верное решение задачи. Для выполнения указанного требования в некоторых случаях бывает полезно включить в программу исследований специальные поисковые опыты, предшествующие разработке общей методики.

Разработка методики экспериментальных исследований

Вне зависимости от сложности экспериментальных исследований проведению экспериментов обязательно должна предшествовать разработка рабочей методики исследований и математической обработки полученных данных.

Методикой экспериментальных исследований называется детальный план исследований, устанавливающий совокупность способов, приемов исследования, их последовательность и средства осуществления исследований (оборудование, приспособления, инструмент, измерительную аппаратуру).

Методика, относящаяся ко всему исследованию, называется общей. Отдельно разрабатываемые рабочие методики для проведения, например, поисковых экспериментов или определенных условий эксперимента, носят название частных. Правильно разработанная методика исследования – залог его успешного осуществления. К разработке методики следует отнестись самым серьезным образом во избежание получения ошибочных результатов или неподдающегося никакой обработке бесполезного материала.

В рабочей методике должны быть выявлены все элементарные подробности экспериментов. В ней указываются: - цель исследования; - последовательность проведения экспериментов; - подготовка к проведению экспериментов; - правила измерений и порядок регистрации результатов измерений; - характеристики и графики, получаемые в результате математической обработки наблюдений.

Цель и задачи исследований.

Цель исследования должна быть сформулирована очень четко и допускать количественную оценку. Цель исследования может быть дополнена формулированием отдельных задач, разделяющих содержание исследований на характерные этапы.

Основная цель производственных исследований – это обеспечение качества выпускаемой продукции при минимальных затратах на ее производство (иначе говоря, оптимизация производства). Задачами исследований являются:

- объективный выбор контролируемых параметров (факторов) технологического процесса;
- минимизация расхода материалов на единицу выпускаемой продукции при сохранении ее качества;
- повышение производительности труда за счет внедрения новой техники и технологии при неизменности качества выпускаемой продукции;
- повышение однородности, стабильности качества продукции, ее надежности в эксплуатации;
- увеличение надежности и быстродействия применяемых средств производства, управления и контроля и др.

Пример 1. Цель исследования микротвердости поверхности деталей после эльборового точения: выявить условия получения значений H_{μ} в установленных чертежом пределах (указываются значения H_{μ}) при удовлетворительной производительности процесса обработки.

Задачи исследования:

- выбор контролируемых параметров (факторов);
- определение степени влияния факторов на процесс;
- обеспечение стабильности достигаемого качества обработки (по H_{μ}).

Пример 2. Цель исследования процесса дорнования отверстий трубчатых деталей многозубыми дорнами - определение условий получения отверстий 10 квалитета точности при производительности 1000-1200 деталей в смену.

Задачи исследования:

- выбор контролируемых параметров (факторов);
- оптимизация режимов обработки;
- выбор смазки и др.

Из приведенных примеров видно, что цель и задачи исследования могут быть установлены лишь после тщательного изучения всех материалов, относящихся к рассматриваемой теме.

Объект, факторы процесса и средства исследований.

На основе предложенной модели процесса необходимо установить:

- вид, форму и размеры объекта исследования;
- количественные значения факторов и уровни их варьирования, а также условия испытаний;
- средства исследования (оборудование, инструмент, измерительные устройства и требования к ним);
- количество подлежащих проведению испытаний.

Факторы исследуемого процесса те же, что и в разработанной модели. По величине факторы должны быть ограничены снизу и сверху в целесообразных границах. Например, скорость резания при точении не может быть равной нулю или бесконечности. При малых скоростях резания низка производительность обработки, при больших – мала стойкость режущего инструмента. Диапазон изменения скорости, следовательно, должен быть целесообразным. Следует иметь в виду, что расширение границ варьирования факторов приводит к существенному повышению затрат на проведение экспериментов, а слишком узкий диапазон – не позволит достигнуть цели исследования.

Условия испытаний определяются на основе выбранного метода исследований. Например, при однофакторном эксперименте следует строго оговорить значения нейтрализованных факторов в каждом опыте. При статистических исследованиях требуется обеспечить взятие выборок, удовлетворяющих условию случайности.

Особое значение приобретает вопрос назначения количества опытов. Например, если предлагаемая модель процесса представляет собой линейную зависимость, то, очевидно, можно ограничиться нахождением лишь двух точек со значительным промежутком между ними. Для построения окружности удовлетворяются тремя точками. При сложных кривых необходимо знать большое количество точек. Соответственно надо будет придавать такое же количество значений каждому исследуемому фактору. Далее, учитывая действие

не включенных в исследование факторов, следует весь опыт повторить, т.е. провести серию опытов, количество которых часто принимается не менее 3-х. Это повышает объективность оценки координат каждой определяемой точки путем их усреднения.

Подготовка к проведению исследований.

В методике раскрываются условия изготовления и монтажа образцов, методы аттестации оборудования и контрольно-измерительных приборов, правила тарирования специальных средств измерений, условия проведения экспериментов, т.е. температура окружающей среды, влажность, технологические средства и способы их применения (например, СОЖ) и др.

В рабочей методике помещаются схемы измерения и их описание (расшифровка), если это требуется по условиям эксперимента. Например, указываются измерительные сечения (осевые и диаметральные) контролируемых после дорнования отверстий, положение и направление измерения площадки износа режущей грани инструмента и т.д. Затем определяется порядок проведения опытов и регистрации их результатов. Для этого в методике должны быть предусмотрены формы специальных таблиц, которые помещаются в журнале исследований.

В последней части методики помещаются указания о методах математической обработки результатов эксперимента, а также формы таблиц, графиков, получаемых в результате этой обработки.

Методика полного факторного эксперимента (ПФЭ)

Ниже приводится краткое изложение полного факторного эксперимента (ПФЭ) типа 2^k , в котором каждому из включенных в эксперимент факторов x^1, x^2, \dots, x^k (« k » факторов) устанавливают только два уровня варьирования: верхний и нижний.

Поскольку факторы процесса неоднородны и имеют различную размерность, а числа, выражающие величины факторов, имеют различные порядки, их приводят к единой системе счисления путем перехода от действительных значений факторов к кодированным по формулам:

$$x_{i\text{ осн}} = \frac{x_{i\text{ max}} + x_{i\text{ min}}}{2}; \quad (8.5)$$

$$\Delta x_i = \frac{x_{i\text{ max}} - x_{i\text{ min}}}{2}; \quad (8.6)$$

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i - x_{i\text{ осн}}}{\Delta x_i}, \quad (8.7)$$

где $x_{i\text{ осн}}$ — основной уровень; $x_{i\text{ max}}$ — верхний уровень; $x_{i\text{ min}}$ — нижний уровень; i — номер фактора; Δx_i — интервал варьирования; \tilde{x}_i — кодированное значение фактора, определяемое для каждого фактора.

Так как число уровней для каждого фактора равно 2, значения x_i могут быть равны $x_{i\text{ max}}$ или $x_{i\text{ min}}$. Кодовые значения факторов, рассчитанные по формуле (8.5), будут равны «+1» (верхний уровень), «-1» (нижний уровень) и «0» (основной уровень). При построении планов матриц планирования эксперимента цифры (единицы) обычно опускают и пишут только знаки «+» или «-», а вместо $\tilde{x}_i \rightarrow x_i$.

Для примера рассмотрим методику планирования ПФЭ для описания зависимости показателя стойкости концевых фрез от заднего угла α (x_1), переднего угла γ (x_2) и ширины ленточки f (x_3). При трех факторах количество опытов в эксперименте $N=2^3=8$. Уровни факторов и интервалы варьирования записывают в таблицу типа 8.1., используя априорную информацию о влиянии факторов.

Таблица 8.1. Уровни факторов и интервалы варьирования

Уровни факторов	Обозначение	α°	γ°	f , мм
		x_1	x_2	x_3
Основной	0	14	15	0,05
Интервал варьирования	Δx_i	4	6	0,03
Верхний	+	18	21	0,08
Нижний	–	10	9	0,02

Далее строим стандартный план матрицы планирования эксперимента в виде табл. 8.2. В ней представлены все возможные сочетания уровней факторов и их взаимодействий, что достигается следующим образом. В первом столбце фиктивному фактору x_0 придают одинаковые кодовые обозначения «+».

В столбце для переменного фактора x_1 знаки чередуют по одному, для x_2 – по два и для x_3 – по четыре. Аналогично можно построить планы матриц для четырех (чередуют знак по восемь), пяти (по шестнадцати), десяти и т.д. факторов. Кодовые значения произведений факторов определяют путем алгебраического перемножения кодовых значений сомножителей. План эксперимента выделяют рамкой в табл. 8.2., остальные данные используют для расчета коэффициентов модели.

Таблица 8.2. Полный план факторного эксперимента 2^3

Номер опыта	Значения факторов в кодовых обозначениях				Комбинация произведений факторов в кодовых обозначениях				Действительное значение показателя стойкости фрез			
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	Y_1	Y_2	Y_3	\bar{Y}
1	+	-	-	-	+	+	+	-	41,0	34,85	34,85	36,90
2	+	+	-	-	-	-	+	+	43,85	47,45	40,90	44,07
3	+	-	+	-	-	+	-	+	43,30	32,00	29,25	34,83
4	+	+	+	-	+	-	-	-	48,85	58,50	50,50	52,62
5	+	-	-	+	+	-	-	+	26,70	15,38	12,25	18,11
6	+	+	-	+	-	+	-	-	31,52	24,35	36,30	30,72
7	+	-	+	+	-	-	+	-	17,32	30,85	28,70	25,62
8	+	+	+	+	+	+	+	+	30,75	29,50	38,15	32,80

После построения плана матрицы планирования проверяют ее свойства:

– симметричность относительно центра эксперимента: алгебраическая сумма элементов столбца каждого фактора должна быть равна нулю (кроме x_0), т.е.

$$\sum_{v=1}^N x_{iv} = 0 \quad (8.8);$$

– нормировку: сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов, или

$$\sum_{v=1}^N x_{iv}^2 = N \quad (8.9);$$

– ортогональность: сумма почленных произведений любых двух столбцов матрицы равна нулю, т.е.

$$\sum_{v=1}^N x_{iv} x_{jv} = 0, \quad j \neq i, \quad j = 0, 1, 2 \dots K \quad (8.10)$$

Если разработанный план матрицы отвечает указанным свойствам, можно приступить непосредственно к проведению экспериментов. Порядок проведения опытов в случайной последовательности для каждой серии опытов целесообразно установить с помощью таблиц равномерного распределения случайных чисел. Например, в рассматриваемом случае опыты следует проводить так:

Таблица 8.3. Рандомизация опытов в эксперименте

Номер опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	№ серии (повтор)
	Строка плана								
Порядок реализации опытов	1	6	5	8	2	7	4	3	I
	3	8	7	2	1	4	5	6	II
	7	1	4	2	5	8	3	4	III

Эта операция называется **рандомизацией** и применяется с целью исключения систематических ошибок, вызванных внешними условиями (переменной температуры, сырья, оператора и т.д.).

После каждой серии опытов получают N значений искомого параметра Y_1, Y_2, Y_3 и рассчитывают среднее значение параметра \bar{Y} для каждой исследуемой точки плана по формуле:

$$\bar{Y}_k = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m Y_{k,j}, \quad (8.11)$$

где $Y_{j,k}$ – результат k, j опыта матрицы планирования; m – число параллельных наблюдений в каждой точке (в примере $m = 3, j=1..3$); k – номер опыта (в примере $k = 1..8$).

Для оценки отклонения показателя параметра от среднего значения следует вычислить дисперсию воспроизводимости по данным « k » параллельных наблюдений плана матрицы планирования в каждой точке по формуле:

$$S_k^2 = \frac{\sum_{j=1}^m (\bar{Y}_k - Y_{k,j})^2}{m-1}. \quad (8.12)$$

Например, в точке 1 плана (строка 1) получим:

$$S_1^2 = \frac{(36,90 - 41,0)^2 + (36,90 - 34,85)^2 + (36,90 - 34,85)^2}{3-1} = 12,60.$$

Аналогично находят значения дисперсий в остальных точках:

$$S_2^2 = 10,76; \quad S_3^2 = 55,44; \quad S_4^2 = 27,41; \quad S_5^2 = 32,36;$$

$$S_6^2 = 36,18; \quad S_7^2 = 52,89; \quad S_8^2 = 21,36$$

Далее определяют критерий Кохрена G , по которому проверяется гипотеза однородности дисперсий:

$$G = \frac{\max(S^2)}{\sum_{k=1}^N S_k^2} \quad (8.13)$$

или, для рассматриваемого примера,

$$G = \frac{55,44}{12,60 + 10,76 + 55,44 + 27,41 + 32,36 + 36,18 + 52,89 + 21,36} = 0,22.$$

Полученное значение « G » сравнивают с табличным $G_{кр}$ (табл.4.4.), определяемым на пересечении столбца $N_{1\sigma \max} = m - 1$ и строки $N_{2\sigma} = N$. В рассматриваемом примере для $m - 1 = 2$ и $N = 8$ находим $G_{кр} = 0,5157$. Если окажется, что расчетное значение « G » меньше табличного $G_{кр}$, то гипотеза об однородности дисперсий и воспроизводимости результатов принимается. В противном случае необходимо увеличить число параллельных опытов.

Если дисперсии однородны, их следует усреднить и найти дисперсию исследуемого параметра по формуле:

$$S^2 = \frac{\sum_{k=1}^N S_k^2}{N} = \frac{249}{8} = 31,125, \quad (8.14)$$

где S^2 – средняя арифметическая дисперсий всех различных точек плана матрицы или дисперсия искомого параметра.

Параметры модели исследуемого процесса или коэффициенты регрессии определяют по единой формуле:

$$b_i = \frac{\sum_{v=1}^N x_{iv} \bar{Y}_v}{N}, \quad (8.15)$$

где b_i – коэффициент регрессии $i = 1, 2 \dots N$

Произведем расчет коэффициентов регрессии для рассматриваемого примера.

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{x_{01} \bar{Y}_1 + x_{02} \bar{Y}_2 + \dots + x_{08} \bar{Y}_8}{8} = \\ &= \frac{(1 \cdot 36,90 + 1 \cdot 44,07 + 1 \cdot 34,83 + 1 \cdot 52,62 + 1 \cdot 18,11 + 1 \cdot 30,72 + 1 \cdot 25,62 + 1 \cdot 32,80)}{8} = 34,46 \\ b_1 &= \frac{x_{11} \bar{Y}_1 + x_{12} \bar{Y}_2 + \dots + x_{18} \bar{Y}_8}{8} = \\ &= \frac{(-1) \cdot 36,90 + 1 \cdot 44,07 + (-1) \cdot 34,83 + 1 \cdot 52,62 + (-1) \cdot 18,11 + 1 \cdot 30,72 + (-1) \cdot 25,62 + 1 \cdot 32,80}{8} = 5,59 \end{aligned}$$

Таким путем находим все восемь искоемых коэффициентов:

$$b_2 = 243; \quad b_3 = -7,64; \quad b_{12} = 0,65; \quad b_{13} = -0,65; \quad b_{23} = 0,39; \quad b_{123} = -0,5.$$

Искомое уравнение в преобразованных переменных x_i будет:

$$Y = 34,46 + 5,59x_1 + 2,43x_2 - 7,64x_3 + 0,65x_1x_2 - 0,65x_1x_3 + 0,39x_2x_3 - 0,5x_1x_2x_3.$$

Далее следует оценить значимость коэффициентов регрессии по t – критерию Стьюдента. Для этого сначала определяют дисперсию и среднеквадратическое отклонение коэффициентов регрессии по формулам:

$$S_b^2 = \frac{S^2}{Nm} = \frac{31,125}{8 \cdot 3} = 1,296. \quad (8.16)$$

$$S_b = \sqrt{\frac{S^2}{Nm}} = \sqrt{1,296} = 1,13. \quad (8.17)$$

Затем рассчитывают значения t_i – критерия:

$$t_i = \frac{|b_i|}{S_b}. \quad (8.18)$$

Для рассматриваемого примера получим:

$$t_0 = \frac{34,47}{1,13} = 30,49; \quad t_1 = \frac{5,59}{1,13} = 4,95; \quad t_2 = \frac{2,43}{1,13} = 2,15; \quad t_3 = \frac{7,64}{1,13} = 6,76;$$

$$t_{12} = \frac{0,65}{1,13} = 0,57; \quad t_{13} = \frac{0,65}{1,13} = 0,57; \quad t_{23} = \frac{0,39}{1,13} = 0,34; \quad t_{123} = \frac{0,5}{1,13} = 0,44.$$

Критическое значение $t_{кр}$ определяют по табл.4.1. в зависимости от числа степеней свободы $N_{зн} = N(m-1) = 8 \cdot (3-1) = 16$ при заданном уровне значимости $q = 5\%$: $t_{кр} = 2,1190$.

Если $t_i > t_{кр}$, то коэффициент b_i признается значимым. Согласно расчету, значимыми являются коэффициенты b_0 , b_1 , b_2 и b_3 . Остальные коэффициенты b_{12} , b_{13} , b_{23} и b_{123} статически незначимы и могут быть отброшены без пересчета всех остальных.

В математическую модель процесса или объекта включают только значимые коэффициенты. Для нашего примера получим

$$Y = 34,47 + 5,59x_1 + 2,43x_2 - 7,64x_3.$$

Наконец, чтобы получить модель в натуральных переменных, надо в полученное уравнение подставить выражения x_i из формулы преобразования (8.5).

Принимая во внимание табл. 8.1., для рассматриваемого примера получим:

$$x_1 = \frac{\alpha - 14}{4}; \quad x_2 = \frac{\gamma - 15}{6}; \quad x_3 = \frac{f - 0,5}{0,03},$$

Следовательно

$$Y(\alpha, \gamma, f) = 33,7 + 1,4\alpha + 0,4\gamma - 255f.$$

После вычисления коэффициентов следует проверить пригодность модели или ее адекватность. Для этого вначале находим оценку дисперсии адекватности модели $S_{ад}^2$ по формуле:

$$S_{ад}^2 = \frac{m}{N-l} \sum_{i=1}^N (\bar{Y} - Y(\alpha_i, \gamma_i, f_i))^2, \quad (8.19)$$

где l – число значимых коэффициентов (в нашем случае – это b_0 , b_1 , b_2 , b_3 , т.е. $l = 4$); $Y(\alpha_i, \gamma_i, f_i)$ – математическое ожидание искомого параметра, подсчитанное по уравнению регрессии. Его определяют для каждой строчки плана матрицы, с учетом знака фактора, как алгебраическую сумму коэффициентов уравнивания. Так, для первой строки

$$Y(\alpha_1, \gamma_1, f_1) = 34,47 + (-1) \cdot 5,59 + (-1) \cdot 2,43 - (-1) \cdot 7,64 = 34,09.$$

Аналогично получим:

$$Y(\alpha_2, \gamma_2, f_2) = 45,27; \quad Y(\alpha_3, \gamma_3, f_3) = 38,95; \quad Y(\alpha_4, \gamma_4, f_4) = 50,13; \quad Y(\alpha_5, \gamma_5, f_5) = 18,81;$$

$$Y(\alpha_6, \gamma_6, f_6) = 29,99; \quad Y(\alpha_7, \gamma_7, f_7) = 23,67; \quad Y(\alpha_8, \gamma_8, f_8) = 34,85.$$

Тогда

$$S_{ад}^2 = \frac{3}{8-4} [(36,90 - 34,09)^2 + (44,07 - 45,27)^2 + (34,83 - 38,95)^2 + (52,62 - 50,13)^2 + (18,11 - 18,81)^2 + (30,72 - 29,99)^2 + (25,62 - 23,67)^2 + (32,80 - 34,85)^2] = 45,135.$$

Адекватность модели проверяют по формуле:

$$F = \frac{S_{ад}^2}{S^2} = \frac{45,135}{31,125} = 1,45, \quad (8.20)$$

где F – критерий Фишера, табличное значение которого $F_{кр}$ определяют по табл. 4.3 в зависимости от числа степеней свободы $N_{лад} = N-l$ и $N_{2ад} = N(m-1)$.

Для рассматриваемого примера при $N_{1ad} = 4$, $N_{2ad} = 16$ и уровне значимости $q = 5\%$, $F_{кр} = 3,01$.

Если расчетное значение критерия F окажется меньше значения $F_{кр}$ (в примере $1,45 < 3,01$), то гипотеза адекватности модели принимается.

АНАЛИЗ МОДЕЛИ

Полученная модель может быть использована только в заданных табл. 8.1. интервалах варьирования факторов: $\alpha = 10...18^\circ$, $\gamma = 9...21^\circ$ и $f = 0,02...0,08$ мм. В указанных пределах увеличение α и γ приводит к повышению стойкости инструмента. Влияние угла α существенно выше, что видно из сопоставления соответствующих коэффициентов. Увеличение ширины ленточки f , наоборот, понижает стойкость, о чем говорит знак коэффициента. Влияние ширины ленточки – значительное.

После проведения многофакторного эксперимента и определения модели может быть поставлена задача оптимизации факторов на основе метода, например, крутого восхождения.

Дробный факторный эксперимент (ДФЭ)

В рассмотренном выше примере все эффекты взаимодействия оказались незначимы, благодаря чему была получена линейная модель. Если бы это обстоятельство было известно априори, число опытов можно было бы сократить. Для этого достаточно было бы фактору присвоить вектор-столбец матрицы, принадлежащий взаимодействию факторов x_1x_2 в плане $N = 2^2$ (табл. 8.4).

Таблица 8.4 Полный факторный эксперимент 2^2

№ опы- тов	X_0	X_1	X_2	X_3 (x_1x_2)	Y_1	Y_2	Y_3	\bar{Y}
1	+	-	-	+				
2	+	+	-	-				
3	+	-	+	-				
4	+	+	+	+				

Поставив x_3 на место x_1x_2 , мы сократили количество опытов ПФЭ 2^3 с 8 до 4-х, т.е. воспользовались половиной ПФЭ 2^3 или полуреplikой. С увеличением количества факторов в эксперименте дробность реплик может возрастать, а количество опытов соответственно уменьшаться по сравнению с ПФЭ (табл. 8.5).

Таблица 8.5. Условные обозначения дробных реплик и количество опытов

Кол-во фак- торов «К»	Дробная реплика	Условное обо- значение 2^{K-C}	Кол-во опытов для ДФЭ	Кол-во опытов для ПФЭ
3	1/2 от 2^3	2^{3-1}	4	8
4	1/2 от 2^4	2^{4-1}	8	16
5	1/4 от 2^5	2^{5-2}	8	32
6	1/8 от 2^6	2^{6-3}	8	64
7	1/16 от 2^7	2^{7-4}	8	128
5	1/2 от 2^5	2^{5-1}	16	32
6	1/4 от 2^6	2^{6-2}	16	64
7	1/8 от 2^7	2^{7-3}	16	128
8	1/16 от 2^8	2^{8-4}	16	256
9	1/32 от 2^9	2^{9-5}	16	512
10	1/64 от 2^{10}	2^{10-6}	16	1025
11	1/128 от 2^{11}	2^{11-7}	16	2048

12	1/256 от 2^{12}	2^{12-8}	16	4096
13	1/512 от 2^{13}	2^{13-9}	16	8192
14	1/1024 от 2^{14}	2^{14-10}	16	16384
15	1/2048 от 2^{15}	2^{15-11}	16	32768

C – количество линейных эффектов (факторов), приравненных к эффектам взаимодействия.

Рассмотрим методику построения планов ДФЭ для изучения зависимости микротвердости поверхности при эльборовом обтачивании закаленной детали от подачи S , глубины резания t , заднего угла α , радиуса при вершине резца r , скорости резания V и переднего угла γ . Для получения модели, сходной по структуре с формулой (8.3), факторы обозначают следующим образом:

$$x_1 = \ln S; \quad x_2 = \ln t; \quad x_3 = \ln \alpha; \quad x_4 = \ln r; \quad x_5 = \ln V; \quad x_6 = \ln(90 + \gamma).$$

После кодирования факторов все их возможные сочетания, в том числе взаимодействия всех порядков, можно представить следующим рядом:

$x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6;$
 $x_1x_2; x_1x_3; x_1x_4; x_1x_5; x_1x_6; x_2x_3; x_2x_4; x_2x_5; x_2x_6;$
 $x_3x_4; x_3x_5; x_3x_6; x_4x_5; x_4x_6; x_5x_6;$
 $x_1x_2x_3; x_1x_2x_4; x_1x_2x_5; x_1x_2x_6; x_1x_3x_4; x_1x_3x_5; x_1x_3x_6;$
 $x_1x_4x_5; x_1x_4x_6; x_1x_5x_6; x_2x_3x_4; x_2x_3x_5; x_2x_3x_6; x_2x_4x_5;$
 $x_2x_4x_6; x_2x_5x_6; x_3x_4x_5; x_3x_4x_6; x_3x_5x_6; x_4x_5x_6;$
 $x_1x_2x_3x_4; x_1x_2x_3x_5; x_1x_2x_3x_6; x_1x_2x_4x_5; x_1x_2x_4x_6; x_1x_2x_5x_6;$
 $x_2x_3x_5x_6; x_2x_4x_5x_6; x_3x_4x_5x_6;$
 $x_1x_2x_3x_4x_5; x_1x_2x_3x_4x_6; x_1x_2x_3x_5x_6; x_1x_2x_4x_5x_6;$
 $x_1x_3x_4x_5x_6; x_2x_3x_4x_5x_6;$
 $x_1x_2x_3x_4x_5x_6.$

Следовательно, полный факторный эксперимент типа 2^6 потребовал бы проведения не менее 64 опытов. Если априори известно, что все взаимодействия, начиная с парных и выше, незначимы, то объем эксперимента резко уменьшится. Действительно, вместо ПФЭ 2^6 можно поставить ДФЭ 2^3 , записав на местах взаимодействий x_1x_2 , x_1x_3 и $x_1x_2x_3$ в табл. 8.2 факторы x_4 , x_5 и x_6 . Мы получим дробный факторный эксперимент типа 2^{6-3} , являющийся 1/8 реплики от 2^6 . Весь дальнейший ход эксперимента и математической обработки его результатов не отличается от ПФЭ.